のとき, $\mathbb{D}(f)$ の ∞ での位数は 2 以上. $\mathbb{D}(f) = c\dot{g}_6\Delta^2 p_1(g_2, \Delta)$ となる isobaric な多項式 $p_1(X, Y)$ がある.

$$\mathbb{D}(G_2^3 - G_6) = c \cdot \Delta,\ c = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 19^{-2}$$

より

$f - hp_1(G_2, c^{-1}(G_2^3 - G_6)) \in M_{\mathrm{od}}^s(\Gamma_K)$ は D 上で 0.

$$f_1 := (f - hp_1(G_2, c^{-1}(G_2^3 - G_6))/\Theta^2 \in M_{\mathrm{od}}^s(\Gamma_K).$$

$$f = hp_1(G_2, c^{-1}(G_2^3 - G_6)) + f_1\Theta^2.$$

f_1 に対してもこの操作を繰り返す.

$\exists \widetilde{f} \in M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K)$ s.t. $f = h\widetilde{f}$.

$$M_{\mathrm{od}}^s(\Gamma_K) = M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K) \cdot h.$$

定理 3.4 (Gundlach [15])

$$\begin{aligned} M(\Gamma_K) &= \mathbb{C}[G_2, G_6, \Theta, h], \\ \sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k(\Gamma_K) t^k &= \frac{1 + t^{15}}{(1-t^2)(1-t^5)(1-t^6)}. \\ M^s(\Gamma_K) &= \mathbb{C}[G_2, G_6, \Theta^2, h], \\ \sum_{k=0}^{\infty} \dim M_k^s(\Gamma_K) t^k &= \frac{1 + t^{15}}{(1-t^2)(1-t^6)(1-t^{10})}. \end{aligned}$$

注意 3.1 Igusa は [26], [27] の中で, 2 次の even weight の Siegel modular forms のなす環 $M_{\mathrm{ev}}(\Gamma_2)$ について

$$M_{\mathrm{ev}}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12}]$$

を示している（ここでは, 3.3 の記号を使ってる）. Hammond [17] は, 序文の中で書いているように, 上記の Gundlach の方法を $M_{\mathrm{ev}}(\Gamma_2)$ へ応用して, Igusa の結果に簡潔な証明を与えている. 詳細については, 伊吹山先生の論説を参照されたい.

3.2 Hammond の結果

ここでは, Gundlach の結果

$$M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K) = \mathbb{C}[h_2, h_6, h_0]$$