定理 3.2 (Gundlach [15])

(1) $\Theta(z) \in M_5(\Gamma_K)$.

(2) $\Theta(z)$ の H^2 上の零点は, $D = \{z \in H^2 \mid z_1 = z_2\}$ 上の点と Γ_K-同値.

(3) $f \in M_k(\Gamma_K)$ かつ $\mathbb{D}(f) = 0$ ならば, $f/\Theta \in M_{k-5}(\Gamma_K)$.

(4) $\Theta(z_2, z_1) = -\Theta(z_1, z_2) \qquad ((z_1, z_2) \in H^2)$.

$$M^{\mathrm{skew}}(\Gamma_K) := \{f \in M(\Gamma_K) \mid f(z_1, z_2) = -f(z_2, z_1)\}$$

とおく. 定理 3.2 より, $\Theta \in M^{\mathrm{skew}}(\Gamma_K)$.

$f \in M^s(\Gamma_K)$ かつ $\mathbb{D}(f) = 0$ ならば, $f/\Theta^2 \in M^s(\Gamma_K)$.

k を 2 以上の偶数とする. $\mathrm{Re}(s+k) > 2$ において

$$G_k(z, s) = \zeta_K(k)^{-1} \sum_{\substack{(m,n) \in (\mathfrak{o}_K \times \mathfrak{o}_K)/U_K - \{(0,0)\} \\ (m,n)=1}} N(mz+n)^{-k} |N(mz+n)|^{-s}$$

と定める. $\zeta_K(s) = \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}_K} N(\mathfrak{a})^{-s}$ は K の Dedekind ゼータ関数.

$$G_k(z) = \lim_{s \to +0} G_k(z, s)$$

とおく. 上の定理で h_2, h_6, h_0 をそれぞれ, G_2, G_6, Θ^2 とおくと

定理 3.3 (Gundlach [15]) $M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K) = \mathbb{C}[\underset{h_2}{\underset{\shortparallel}{G_2}}, \underset{h_6}{\underset{\shortparallel}{G_6}}, \underset{h_0}{\underset{\shortparallel}{\Theta^2}}]$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M^s_{2k}(\Gamma_K) t^{2k} = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^6)(1-t^{10})}.$$

$f \in M(\Gamma_K)$ は

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2}(f(z_1, z_2) + f(z_2, z_1)) + \frac{1}{2}(f(z_1, z_2) - f(z_2, z_1))$$

第 1 項は $M^s(\Gamma_K)$ の元で, 第 2 項は $M^{\mathrm{skew}}(\Gamma_K)$ の元.

$$M(\Gamma_K) = M^s(\Gamma_K) + M^s(\Gamma_K)\Theta.$$

$f \in M^s_{\mathrm{od}}(\Gamma_K)$ で $\mathbb{D}(f) \neq 0$ となるようなもので最小な weight をもつものを求める.

$f \in M^s_k(\Gamma_K)$ のとき, $\mathbb{D}(f) \in S_{2k}(\Gamma_1)$. k は奇数だから, $2k \equiv 2 \pmod 4$. $M(\Gamma_1)$ の元で, ∞ で位数 2 の零点をもつものの最小の k は 15. Gundlach は $h \in M^s_{15}(\Gamma_K)$ で $\mathbb{D}(h) = c \cdot g_6 \Delta^2$ $(\exists c \neq 0)$ をみたすものを構成した. $f \in M^s_{\mathrm{od}}(\Gamma_K)$