証明

(1) $M(\Gamma_1)^{(4)} = \mathbb{C}[g_4, g_6^2]$ より, $\mathbb{D}$は全射. $h_0 \in M_w^s(\Gamma_K)$ とする. $\forall f \in M_k^s(\Gamma_K)$ をとる. isobaric な多項式 $p_0(X,Y)$ で

$$\mathbb{D}(f) = p_0(g_4, g_6^2) = \mathbb{D}(p_0(h_2, h_6))$$

となるものが存在する.

$f - p_0(h_2, h_6) \in \mathrm{Ker}\ \mathbb{D} = (h_0)$ であるから, $\exists f_1 \in M_{k-w}^s(\Gamma_K)$ s.t. $f - p_0(h_2, h_6) = h_0 f_1$. f_1 に対して同様のことを繰り返す. $n = \left[\frac{k}{w}\right]$ とおくと,

$$f = p_0(h_2, h_6) + p_1(h_2, h_6)h_0 + \cdots + p_n(h_2, h_6)h_0^n.$$

よって　$M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K) = \mathbb{C}[h_2, h_6, h_0]$.

(2) $\exists P(X,Y,Z) \neq 0$ s.t. $P(h_2, h_6, h_0) = 0$ と仮定する.

$$P(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n} p_i(X,Y)Z^i,\ p_0(X,Y) \neq 0$$

と書く. X, Y, Z にそれぞれ h_2, h_6, h_0 を代入すると, $p_0(g_4, g_6^2) = 0$. g_4, g_6^2 は $\mathbb{C}$ 上代数的独立だから, $p_0(X,Y) = 0$. 矛盾. □

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ とする. $\alpha, \beta \in \mathfrak{o}_K$ に対して,

$$\theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z) = \sum_{\nu \in \mathfrak{o}_K} \mathbf{e}\left(\mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)^2 z + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\nu + \frac{\alpha}{2}\right)\beta\right)\right)\right)$$

: characteristic $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ の theta constant

$\mathbf{e}(\mathrm{tr}(\alpha\beta)/2) = 1$ (resp. -1) のとき, $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ は even (resp. odd) という.

$\theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)$ が恒等的に 0 にならない $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ が even.

mod 2 で even な theta constant は 10 個.

$$\Theta(z) := \prod_{\mathrm{even}} \theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(z)$$

とおく.

(i.e. tr(αβ) even)
α, β ∈ O/2