2.3 実2次体 $(n = 2)$ の場合

2.3.1 Igusa-Hammond の結果

定理 2.4 (Hammond [18]) 次は同値.

(1) K の modular embedding が存在する.

(2) $[\mathfrak{D}_K] \in Cl_K^+$ は平方.

(3) d_K は2つの平方数の和.

(4) d_K は $4m+3$ の形の素因数をもたない.

定理が成立するとき,

$$K \text{ の modular embedding の同値類の数} = 2^{t-1}.$$

ただし, t は d_K を割る異なる素数の数.

2.3.2 Freitag-Schneider の結果

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ とする.

定義 2.5 (ϕ_A, Φ_A) : orthogonal $\Leftrightarrow$ ${}^tAAT = 1_2$.

定理 2.5 (Freitag-Schneider [10]) T を与えたとき, 次は同値 :

(1) $\exists(\phi_A, \Phi_A)$ orthogonal,

(2) $d_K = u^2 + tv^2$ と書ける.

3 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の場合の結果

3.1 Gundlach の結果

Gundlach は本質的に次の結果を証明している.

定理 3.1 (Gundlach [15]) $h_2 \in M_2^s(\Gamma_K), h_6 \in M_6^s(\Gamma_K)$ で $\mathbb{D}(h_2) = g_4, \mathbb{D}(h_6) = g_6^2$ となるものが存在して,

$$M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K) \to M(\Gamma_1), \quad f \mapsto \mathbb{D}(f)$$

の kernel が h_0 によって生成されているとき,

$$M_{\mathrm{ev}}^s(\Gamma_K) = \mathbb{C}[h_2, h_6, h_0] \quad (\text{多項式環}).$$