$$F_K = \{(\mathfrak{a},\rho) \mid (\mathfrak{a},\rho) \text{ は (I) をみたす }\}$$

とおくと, P_K と F_K との間に $(\psi,u) \mapsto (\mathfrak{a},\rho)$ による全単射がある. F_K 上に

$$(\mathfrak{a},\rho) \sim (\mathfrak{a}',\rho') \Leftrightarrow \quad \mathfrak{a}' = \alpha\mathfrak{a},\ \rho' = \alpha^2\rho \text{となる } K \text{ の } 0 \text{ でない元がある}$$

による同値関係を定義すると, この同値関係は P_K 上の同値関係に対応する.

以上の対応から, 次のことがわかる.

定理 2.1 (Igusa cf. [18]) K の modular embedding が存在するためには, K の共役差積 $\mathfrak{D}_K$ の狭義 ideal 類が K の狭義 ideal 類群 Cl_K^+ において平方であることが必要かつ十分である.

次の記号を使う.
$\pi(K) := \#\{[\mathfrak{a}] \in Cl_K^+ \mid [\mathfrak{a}^2] = [\mathfrak{D}_K] \in Cl_K^+\}$
U_K: K の単数群,
$U_K^2 = \{u^2 \mid u \in U_K\}$,
U_K^+: K の総正な単数全体のなす群.

定理 2.2 (Igusa cf. [18])
K の modular embedding の同値類の数 $= \pi(K) \cdot [U_K^+ : U_K^2]$.

2.2.2 Freitag-Schneider の結果

記号

$$T = \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbb{Z},\ t_i > 0,\ t_i | t_{i+1},\ T_0 := \begin{pmatrix} 1_n & O \\ O & T \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma(T) := \{M \in Sp_n(\mathbb{Q} \mid T_0^{-1} M T_0 \in M_{2n}(\mathbb{Z})\}.$$

$A \in GL_n(\mathbb{R})$ に対して, $N_A := \begin{pmatrix} A & O \\ O & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$.

$$\phi_A := N_A\phi_0, \quad \Phi_A := N_A \Phi_0 N_A^{-1}.$$

$$A(K,T) := \{A \in GL_n(\mathbb{R} \mid \Phi_A(\Gamma_K) \subset \Gamma(T)\}$$

とおく.

定理 2.3 (Freitag-Schneider [10]) 任意の総実代数体 K に対して, $A(K,T) \neq \phi$ となる T が存在する.