が成立する．この (ϕ, Φ) を (ϕ_0, Φ_0) の alteration という．

K を n 次総実代数体, $\mathfrak{o}_K$ を K の整数環とする． Igusa-Hammond による modular embedding の定義を述べよう．

定義 2.3 K の modular embedding とは, 次の 3 条件をみたすような正則写像 $\phi : H^n \to \mathfrak{S}_n$ と群準同型 $\Phi : SL_2(\mathbb{R})^n \to Sp_n(\mathbb{R})$ との pair (ϕ, Φ) のことである：

(i) (ϕ, Φ) は (ϕ_0, Φ_0) の alteration.

(ii) $\Phi(\Gamma_K) \subset \Gamma_n$.

(iii) $f \in M_k(\Gamma_n) \quad \Rightarrow \quad f \circ \phi \in M_k(\Gamma_K)$.

注意 2.1 (1) 条件 (iii) は不要である．実際, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{R})$, $Z \in \mathfrak{S}_n$ に対して

$$J(M, Z) = \det(CZ + D)$$

とおく． $\Gamma_K \subset SL_2(\mathbb{R})^n$, $\gamma \mapsto (\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)})$ とみなすと, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $J(\gamma^*, z^*) = N(cz + d)$ が成立する．よって, 上の定義の条件 (iii) を次の条件に置き換えることができる．

(iv) $J(\Phi(\gamma), \phi(z)) = J(\gamma^*, z^*) \qquad (\gamma \in \Gamma_K,\ z \in H^n)$. しかし, 2.1.2 の (2) により (iv) は自動的に成立している．

(2) 条件 (iii) が必要な場合もある（例えば, arithmetic subgroup が小さくて, character 付きの保型形式を扱う場合）．

(ϕ, Φ) を (ϕ_0, Φ_0) の alteration $(\phi = N\phi_0)$ で (2) をみたすものとすると, (ϕ, Φ) が K の modular embedding であるためには, $N = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ であることが必要十分である．

定義 2.4 $(\phi, \Phi), (\phi', \Phi')$: K の modular embedding.

適当な $M \in Sp_n(\mathbb{Z})$ によって

$$\phi' = M\phi, \qquad \Phi' = M\Phi M^{-1}$$

が成立するとき, (ϕ, Φ) と (ϕ', Φ') は同値であるという．

さて, K の modular embedding の同値類の数を求めよう．