で, $(g \cdot \exp z)_0$ が $\mathfrak{D}$ 上の標準的な保型因子 $\mu(g,z)$ である.

(ϕ, Φ) を 2.1.1 に出てきた equivarinat holomorphic map とし, μ' を $\mathfrak{D}'$ 上の標準的な保型因子とする. $z \in \mathfrak{D}, g \in G$ に対し, $\Phi(g) \cdot \exp \phi(z)$ の $K_{\mathbb{C}}$-成分は $\mu'(\Phi(g), \phi(z))$. (ϕ, Φ) は equivariant であるから,

$$\det \phi(\mu(g,z)) = \det \mu'(\Phi(g), \phi(z)). \tag{2}$$

定義 2.2 (ϕ, Φ) は次の条件をみたすとき, modular embedding と呼ばれる：

(i) (ϕ, Φ) は equivariant holomorphic map.

(ii) G, G', Φ が $\mathbb{Q}$ 上で定義されていて, G, G' のある arithmetic subgroup Γ, Γ' に対して, $\Phi(\Gamma) \subset \Gamma'$.

2.2 Modular embeddings

2.2.1 Igusa-Hammond の結果

$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ を対角線に並べてできる (n,n) 型対角行列を $z^* = \begin{pmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix}$ と書く.

$$m = (m_1, \ldots, m_n) \in SL_2(\mathbb{R})^n, \qquad m_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$$

に対して $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $d = (d_1, \ldots, d_n)$, $m^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$ とおくと, $m^* \in Sp_n(\mathbb{R})$ となる.

$$\begin{aligned} \phi_0 &: H^n \to \mathfrak{S}_n, \quad z \mapsto z^* \\ \Phi_0 &: SL_2(\mathbb{R})^n \to Sp_n(\mathbb{R}), \quad m \mapsto m^* \end{aligned}$$

と定義すると, ϕ_0 は正則写像で, Φ_0 は単射準同型であり,

$$\phi_0(m \cdot z) = \Phi_0(m) \cdot \phi_0(z) \qquad (m \in SL_2(\mathbb{R})^n,\ z \in H^n)$$

が成り立つ. $N \in Sp_n(\mathbb{R})$ を取って,

$$\phi(z) = N \cdot \phi_0(z), \qquad \Phi(m) = N\Phi_0(m)N^{-1}$$

とおくと

$$\phi(m \cdot z) = \Phi(m) \cdot \phi(z) \qquad (m \in SL_2(\mathbb{R})^n,\ z \in H^n)$$