定義 2.1 (ϕ, Φ) は, 次の条件が成立するとき equivariant holomorphic map と呼ばれる:

(1) $\Phi(g \cdot x) = \phi(g) \cdot \Phi(x) \quad (g \in G,\ x \in \mathcal{D})$,

(2) $d\phi \circ \theta = \theta' \circ d\phi$.

$\Phi(\mathcal{D})$ のすべての測地線が, $\mathcal{D}'$ の曲線とみて測地線となるとき, $\Phi(\mathcal{D})$ は totally geodesic であるという.

命題 2.1 次は同値.

(1) $d\phi \circ \theta = \theta' \circ d\phi$,

(2) $\Phi(\mathcal{D})$ は totally geodesic,

(3) $d\phi(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{k}', d\phi(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}'$.

2.1.2

2.1.1 の記号を使う. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ の複素化とする. $\mathfrak{k}$ の元 Z で, $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = 0\}$ となるものがある. $\mathrm{ad}(Z)$ の $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ における固有値は 0, $\pm i$ である.

$$\mathfrak{p}_{\pm} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \mid [Z, X] = \pm iX\} \quad (\text{複号同順})$$

とおくと, $\mathfrak{p}_{\pm}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の可換部分代数で, $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ に含まれていて,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}_{+} + \mathfrak{p}_{-}, \qquad \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}_{+} + \mathfrak{p}_{-}.$$

$G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ に対応する Lie 群とする. $P_{\pm} = \exp(\mathfrak{p}_{\pm})$ (複号同順) とおくと, $G \subset P_{-}K_{\mathbb{C}}P_{+}$ となり,

$$P_{-} \times K_{\mathbb{C}} \times P_{+} \to G_{\mathbb{C}}, \quad (x, y, z) \mapsto x \cdot y \cdot z$$

は $G_{\mathbb{C}}$ の開集合の上への微分同相である. G の元 g を

$$g = g_{-} \cdot g_0 \cdot g_{+} \qquad (g_{-} \in P_{-}, g_0 \in K_{\mathbb{C}}, g_{+} \in P_{+})$$

と表すと

$$G \to \mathfrak{p}_{+}, \quad g \mapsto \log g_{+}$$

により, $\mathcal{D}$ を $\mathfrak{p}_{+}$ の中の有界領域とみなすことができる. $P_{-}K_{\mathbb{C}}G/P_{-}$ は $\mathcal{D}$ 上の複素解析的主バンドルで $K_{\mathbb{C}}$ をファイバーとしてもつ. このバンドルは P_{+} によって定義される自然な cross-section をもち, ある保型因子 μ に対応する. $z \in \mathcal{D} \subset \mathfrak{p}_{+}, g \in G$ に対し

$$g \cdot \exp z = (g \cdot \exp z)_{-} \cdot (g \cdot \exp z)_0 \cdot (g \cdot \exp z)_{+}$$