と書く.

n 次対称群 S_n は H^n へ座標の置換として作用する:

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto \sigma \cdot z = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)}) \quad (\sigma \in S_n).$$

K の $\mathbb{Q}$ 上の自己同型群 $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ は S_n の部分群とみなすことができる. $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ が $\Gamma_K \cdot \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ の正規部分群であるような K を考える.

定義 1.4 $f \in M_k(\Gamma_K)$ は,

$$f(\sigma \cdot z) = f(z) \qquad (\sigma \in \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}))$$

をみたすとき, Γ_K に関する weight k の symmetric Hilbert modular form と呼ばれる.

Γ_K に関する weight k の symmetric Hilbert modular forms のなすベクトル空間を $M^s(\Gamma_K)$ と書く. 特に, $n=2$ のとき, $f \in M(\Gamma_K)$ に対して

$$f \in M^s(\Gamma_K) \quad \Leftrightarrow \quad f(z_2, z_1) = f(z_1, z_2).$$

$M^s(\Gamma_K)^{(d)}, M^s_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K), \ldots$ などを上と同様に定義する.

H を H^n の中へ diagonal に埋め込む:

$$H \to H^n, \quad \tau \mapsto (\tau, \ldots, \tau).$$

その像を D と書くと, Γ_K の D での固定部分群は Γ_1 である. $f \in M_k(\Gamma_K)$ に対して, $f(\tau, \ldots, \tau) \in M_{nk}(\Gamma_1)$. この $f(\tau, \ldots, \tau)$ を $f|D$ と書くと, $\mathbb{C}$-代数準同型

$$\mathbb{D} : M(\Gamma_K) \to M(\Gamma_1), \quad f \mapsto f|D$$

が得られる.

$f(z) = \sum_{\nu \in \Lambda_K} a_f(\nu) \mathbf{e}(\mathrm{Tr}(\nu z)) \in M(\Gamma_K)$ に対して, $\mathbb{D}(f)(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{\mathbb{D}(f)}(n) q^n$ と書くと,

$$c_{\mathbb{D}(f)}(n) = \sum_{\substack{\nu \in \Lambda_K, \\ \mathrm{Tr}(\nu) = n}} a_f(\nu).$$

1.3 Siegel modular forms

n を 2 以上の自然数とする.

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &= \{ Z = X + iY \mid X, Y \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tZ = Z,\ Y > 0 \} \\ Sp_n(\mathbb{R}) &= \{ M \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid {}^tMJM = J \} \\ \Gamma_n &= Sp_n(\mathbb{Z}) = M_{2n}(\mathbb{Z}) \cap Sp_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$