$\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$ とおく．Γ_K は $\mathbb{P}^1(K)$ へ 1 次分数変換によって作用する．そのとき，各 orbit を Γ_K の cusp という．$\sigma = \alpha/\beta \in \mathbb{P}^1(K)$ をとる．ただし，$\alpha,\ \beta \in \mathfrak{o}_K$ であるようにとっておく．σ に $\mathfrak{o}_K\alpha + \mathfrak{o}_K\beta$ を対応させることで，$\mathbb{P}^1(K)$ から K の ideal 類群 Cl_K への全単射が得られる．したがって，Γ_K の cusp の数は K の類数に等しい．

$M_k(\Gamma_K)$ を Γ_K に関する weight k の Hilbert modular forms のなすベクトル空間とする．任意の $\sigma \in \mathbb{P}^1(K)$ に対して，$g_\sigma \cdot \sigma = \infty$ となる $GL_2^+(K)$ の元 g_σ が存在する．$f \in M_k(\Gamma_K)$ を任意にとると，K の中の rank n の $\mathbb{Z}$-加群 M が存在して $f|_k g_\sigma$ を次のように Fourier 展開することができる:

$$f|_k g_\sigma = \sum_{\nu \in M^\vee} a_\nu \mathrm{e}(\mathrm{Tr}(\nu z)).$$

ここに，$M^\vee = \{\lambda \in K \mid \mathrm{Tr}(\lambda\mu) \in \mathbb{Z}\ (\forall \mu \in M)\}$，$\mathrm{e}(\quad) = \exp(2\pi i \quad)$，$\mathrm{Tr}(\nu z) = \sum_{i=1}^{n} \nu^{(i)} z_i$ である．$a_\nu \neq 0$ ならば，$\nu = 0$ または ν は総正（つまり $\nu^{(i)} > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$）であることが知られている（Koecher の原理）．$\mathfrak{D}_K$ を K の共役差積とし，

$$\Lambda_K = \{\nu \in \mathfrak{D}_K^{-1} \mid \nu \text{は総正, または} 0\ \}$$

とおく．$\sigma = \infty$ に対して上の Fourier 展開を用いると，$f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{\nu \in \Lambda_K} a_f(\nu) \mathrm{e}(\mathrm{Tr}(\nu z)), \quad a_f(\nu) \in \mathbb{C}$$

と表される．さらに Fourier 係数 $a_f(\nu)$ がすべて整数であるとき，f は整係数 Hilbert modular form と呼ばれる．

$M_k(\Gamma_K, \mathbb{Z})$: Γ_K に関する weight k の整係数 Hilbert modular form 全体

定義 1.3 $f \in M_k(\Gamma_K)$ とする．Γ_K の各 cusp の代表元 σ をとって，$f|_k g_\sigma$ を Fourier 展開して $a_0 = 0$ が成立するとき，f は cusp form と呼ばれる．

Γ_K に関する weight k の Hilbert cusp forms のなすベクトル空間を $S_k(\Gamma_K)$ で表す．h_K を K の類数とすると，Γ_K の cusp の数は h_K であるから，

$$\dim M_{2k}(\Gamma_K) = \dim S_{2k}(\Gamma_K) + h_K$$

となる．

正の整数 d に対して

$$M(\Gamma_K)^{(d)} := \bigoplus_{d|k} M_k(\Gamma_K), \qquad M(\Gamma_K, \mathbb{Z})^{(d)} := \bigoplus_{d|k} M_k(\Gamma_K, \mathbb{Z})$$

とおく．特に，

$M_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K) = M(\Gamma_K)^{(2)}$, $M_{\mathrm{ev}}(\Gamma_K, \mathbb{Z}) = M(\Gamma_K, \mathbb{Z})^{(2)}$