定理 1.1 (1) $M(\Gamma_1) = \mathbb{C}[g_4, g_6]$,
(2) $M(\Gamma_1)^{(4)} = \mathbb{C}[g_4, \Delta]$,
(3) $M(\Gamma_1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[g_4, g_6, \Delta]$,
(2) $M(\Gamma_1, \mathbb{Z})^{(4)} = \mathbb{Z}[g_4, \Delta]$.

1.2 Hilbert modular forms

n を 1 より大きい自然数とする. K を n 次総実代数体とする. すると K から $\mathbb{R}$ への n 個の埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{R}$, $\ x \mapsto x^{(i)} \quad (i = 1, \ldots, n)$ が存在する. $\mathfrak{o}_K$ を K の整数環とする. $\Gamma_K = SL_2(\mathfrak{o}_K)$ を K の Hilbert modular 群と呼ぶ. 複素上半平面を $H = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ で表す. そのとき, $SL_2(\mathbb{R})^n$ は H の n 個の直積 H^n へ各成分ごとの 1 次分数変換によって作用する. 単射準同型写像

$$SL_2(K) \hookrightarrow SL_2(\mathbb{R})^n, \quad g \mapsto (g^{(1)}, \ldots, g^{(n)})$$

によって, Γ_K を $SL_2(\mathbb{R})^n$ の部分群とみなす. ただし, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $g^{(i)} = \begin{pmatrix} a^{(i)} & b^{(i)} \\ c^{(i)} & d^{(i)} \end{pmatrix}$ とおいた. すると Γ_K は H^n へ次のように作用する. $z = (z_1, \ldots, z_n) \in H^n$ と $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_K$ に対して,

$$\gamma \cdot z = \left(\frac{a^{(1)} z_1 + b^{(1)}}{c^{(1)} z_1 + d^{(1)}}, \ldots, \frac{a^{(n)} z_n + b^{(n)}}{c^{(n)} z_n + d^{(n)}} \right). \tag{1}$$

k を 0 以上の整数とする. また, $GL_2^+(K)$ を K の元を成分とする 2 次行列で行列式が正なもの全体のなす群とする. $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(K)$ と H^n 上の関数 f に対して,

$$\begin{aligned} N(cz + d) &= \prod_{i=1}^{n} (c^{(i)} z_i + d^{(i)}), \\ (f|_k g)(z) &= N(cz + d)^{-k} f(g \cdot z) \end{aligned}$$

とおく. ただし, $g \cdot z$ は (1) のように定義する.

定義 1.2 正則関数 $f : H^n \to \mathbb{C}$ が Γ_K に関する weight k の Hilbert modular form とは

$$f|_k g = f \quad (\forall g \in \Gamma_K)$$

が成立することである.