と定める．

定義 1.1 H 上の正則関数 f は次の 2 条件をみたすとき, $\Gamma_1 = SL_2(\mathbb{Z})$ に関する weight k の elliptic modular form と呼ばれる：

(1) $f|_k g = f \qquad (g \in \Gamma_1)$,

(2) f は次のように Fourier 展開される．

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_f(n) q^n.$$

ここに, $q = \exp(2\pi i \tau)$. (2) において, Fourier 係数 $c_f(n)$ がすべて整数であるとき, f は整係数 elliptic modular form という．$c_f(0) = 0$ であるような elliptic modular form f を cusp form という．

$M_k(\Gamma_1)$: weight k の elliptic modular form 全体,

$M_k(\Gamma_1, \mathbb{Z})$: weight k の整係数 elliptic modular form 全体

とおくと k が奇数のとき, $M_k(\Gamma_1) = 0$ である．さらに正の整数 d に対して

$$M(\Gamma_1)^{(d)} = \bigoplus_{d|k} M_k(\Gamma_1), \qquad M(\Gamma_1, \mathbb{Z})^{(d)} = \bigoplus_{d|k} M_k(\Gamma_1, \mathbb{Z})$$

とおく．$M(\Gamma_1)^{(d)}, M(\Gamma_1, \mathbb{Z})^{(d)}$ は次数環になる．

4 以上の偶数 k に対して,

$$g_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(n\tau + m)^k}$$

とおく．ただし, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ は Riemann ゼータ関数である．この $g_k(\tau)$ を normalized Eisenstein 級数という．これは

$$g_k(\tau) = 1 + \frac{(2\pi i)^k}{\zeta(k)(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

と Fourier 展開される．ここで $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$ とおいた．

$\Delta(\tau) := 2^{-6} 3^{-3} (g_4(\tau)^3 - g_6(\tau)^2)$ は weight 12 の cusp form であり,

$$\Delta(\tau) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$$

と表せる．よって, $\Delta \in M_{12}(\Gamma_1, \mathbb{Z})$. Δ が H 上で零点を持たないことより, 次が成立する．

命題 1.1 (1) $f \in M_k(\Gamma_1) \ \Rightarrow \ f/\Delta \in M_{k-12}(\Gamma_1)$,

(2) $f \in M_k(\Gamma_1, \mathbb{Z}) \ \Rightarrow \ f/\Delta \in M_{k-12}(\Gamma_1, \mathbb{Z})$.