<u>Korollar</u> Sei $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $c, d \neq 0$. Dann gilt

$$v(\Gamma)^{-1}(ic)^{-n/2}\sum_{\lambda\in\Gamma/c\Gamma} e^{\pi i \frac{a}{c}\lambda^2} = d^{-n/2}\sum_{\lambda\in\Gamma/d\Gamma} e^{\pi i\frac{b}{d}\lambda^2}.$$

Hiermit kann man nun sehr leicht den Homomorphismus ε studieren.

Aus dem Korollar folgt nämlich zunächst, daß

$$\varepsilon(A) = d^{-n/2}\sum_{\lambda\in\Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d}\lambda^2} \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/d}).$$

Nun ist aber auch $\varepsilon(A) = \varepsilon(A\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \varepsilon\begin{pmatrix} a & ax+b \\ c & cx+d \end{pmatrix}$ für jede ganze Zahl x.
Also

$$\varepsilon(A) \in \bigcap_{\substack{x\in\mathbb{Z} \\ cx+d\neq 0}} \mathbb{Q}(e^{2\pi i/[cx+d]}) = \mathbb{Q}.$$

Dann ist aber $\varepsilon(A)$ invariant unter dem Automorphismus des Körpers $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/d})$, der $e^{2\pi i b/d}$ nach $e^{2\pi i/d}$ schickt, anders ausgedrückt

$$\varepsilon(A) = d^{-n/2}\sum_{\lambda\in\Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \frac{\lambda^2}{d}}.$$

Wir haben also bewiesen, daß $\varepsilon(A)$ nur von d abhängt, d.h.

$(*)$ $$\varepsilon\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(d)$$

für eine arithmetische Funktion $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^\times$. Vereinbaren wir $\chi(d) = 0$ für alle d mit $ggt(d,N) \neq 1$, so ist χ durch $(*)$ eindeutig bestimmt. Wir zeigen jetzt, daß χ ein Dirichletcharakter modulo N ist, d.h. daß ~~für~~ alle $d, d' \in \mathbb{Z}$ gilt:

(i) $\chi(d+N) = \chi(d)$

(ii) $\chi(dd') = \chi(d)\chi(d')$

(iii) $\chi(d) = 0$ genau dann, wenn $ggt(d,N) \neq 1$.

Zum Beweis von (i) sei o.B.d.A. $ggt(d,N)=1$. Wähle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, sodaß $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ N & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Wie wir gerade gesehen haben, ist $\varepsilon\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ N & d \end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix} \alpha & \beta+\alpha \\ N & d+N \end{pmatrix}$, was sofort (i) impliziert. Zum Beweis von (ii) ~~Sollte~~ sei wieder o.B.d.A. $ggt(dd',N)=1$. Wähle $A = \begin{bmatrix} * & * \\ * & d \end{bmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} * & * \\ * & d' \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$. Dann ist $\chi(d)\chi(d') = \varepsilon(A)\varepsilon(A') = \varepsilon(AA') = \varepsilon\begin{pmatrix} * & * \\ * & dd'+xN \end{pmatrix}$ mit einer geeigneten Zahl x, und dies ist (ii).