Man rechnet sofort nach, daß hierdurch Untergruppen von $Sl_2(\mathbb{Z})$ erklärt werden:

$$\Gamma(N) \subseteq \Gamma_1(N) \subseteq \Gamma_0(N) \subseteq Sl_2(\mathbb{Z}).$$

Überdies haben alle diese Untergruppen endlichen Index in $Sl_2(\mathbb{Z})$
(Übungsaufgabe: $Sl_2(\mathbb{Z})/\Gamma(N) \approx Sl_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$).

Nach dem Korollar haben wir

$$\vartheta_{\Gamma,P}|_k A = \varepsilon(A)\, \vartheta_{\Gamma,P} \quad \text{für } A \in \Gamma_0(N).$$

Hieraus folgt sofort, daß durch $\varepsilon(A)$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\varepsilon : \Gamma_0(N) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

erklärt wird. Diesen wollen wir jetzt näher studieren.

Hierzu erweist es sich als günstig, noch einmal zur Formel $(*)$ zurückzukehren und eine etwas andere Formel für $\varepsilon(A)$ als im Korollar formuliert herzuleiten.
Wir nehmen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N)$ und schreiben

$$\vartheta_{\Gamma,P}|_k A = \left(\vartheta_{\Gamma,P}|_k \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}\right)|_k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen wir nun $\vartheta_{\Gamma,P}|_k A$ indem wir auf die rechte Seite dieser Gleichung zweimal die Formel $(*)$ anwenden, so erhalten wir nach einigen offensichtlichen Vereinfachungen:

$$\vartheta_{\Gamma,P}|_k A = \frac{|\Gamma^*/\Gamma|}{v(\Gamma)^2}\, d^{-n/2} \sum_{\lambda \in \Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d}\lambda^2}\, \vartheta_{\Gamma,P},$$

wobei natürlich $d \neq 0$ anzunehmen ist. Hierbei ist aber

$$v(\Gamma)^2 = |\Gamma^*/\Gamma|$$

(Ist $\Gamma = \mathbb{Z}g_1 + \dots + \mathbb{Z}g_n$, $g_1^*, \dots, g_n^*$ die zu $g_1, \dots, g_n$ duale Basis, also $\Gamma^* = \mathbb{Z}g_1^* + \dots + \mathbb{Z}g_n^*$, so ist nach dem Elementarteilersatz $|\Gamma^*/\Gamma| = \frac{|\det(g_1, \dots, g_n)|}{|\det(g_1^*, \dots, g_n^*)|} = |\det(g_1, \dots, g_n)|^2$ $= v(\Gamma)^2$).

Wir haben damit