$$\sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda\equiv\lambda_0(\Gamma)}} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2} = \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda\equiv\lambda_0(\Gamma)}} e^{\pi i\frac{a}{c}(\lambda+c\mu)^2} = e^{2\pi i a\lambda_0\cdot\mu}\sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda\equiv\lambda_0(\Gamma)}} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}.$$

Dies zeigt, daß unsere Gauss-Summe höchstens dann von 0 verschieden ist, wenn $a\lambda_0\cdot\mu\in\mathbb{Z}$ für alle $\mu\in\Gamma^*$ mit $c\mu\in\Gamma$, $c\mu^2\in 2\mathbb{Z}$, gilt. Sei jetzt N die kleinste natürliche Zahl, sodaß $N\mu^2\in 2\mathbb{Z}$ für alle $\mu\in\Gamma^*$. Diese Zahl heißt Stufe des Gitters Γ. Unmittelbar aus der Definition der Stufe N folgt, daß $(N\Gamma^*)\cdot\Gamma^*\subseteq\mathbb{Z}$, d.h. $N\Gamma^*\subseteq(\Gamma^*)^*=\Gamma$ ist. Nehmen wir daher an, daß $N|c$ gilt, so sehen wir, daß die eben behandelte Gauss-Summe ~~genau~~ höchstens dann von 0 verschieden ist, wenn $a\lambda_0\cdot\Gamma^*\subseteq\mathbb{Z}$, d.h. $a\lambda_0\in\Gamma$ ist. Wenden wir dies auf die Transformationsformel (*) an, brauchen wir dabei, daß für $g,\sigma\in\Gamma^*$ stets $a(g+d\sigma)=ag+(1+bc)\sigma\equiv ag+\sigma\ (\Gamma)$ gilt, also $a\cdot(g+d\sigma)$ äquivalent zu $\sigma\equiv -ag\ (\Gamma)$ ist, so sehen wir, daß $\vartheta_{g+\Gamma,P}|_k A$ im Wesentlichen mit $\vartheta_{-ag+\Gamma,P}=(-1)^d\vartheta_{ag+\Gamma,P}$ übereinstimmt. Fassen wir zusammen, so erhalten wir nach einigen offensichtlichen ~~Umformungen~~ Vereinfachungen

<u>Korollar</u> Sei $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $N|c$. Dann gilt

$$\vartheta_{g+\Gamma,P}|_k A = \varepsilon(A)\, e^{\pi i ab g^2}\,\vartheta_{ag+\Gamma,P}$$

mit

$$\varepsilon(A)=\begin{cases} v(\Gamma)^{-1}(ic)^{-n/2}\sum_{\lambda\in\Gamma/c\Gamma} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2} & \text{für } c\neq 0\\ (-1)^{n/2} & \text{für } c=0\end{cases}.$$

Sei jetzt

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(N) &= \left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})\ \middle|\ N|c\right\}\\
\Gamma_1(N) &= \left\{\quad''\quad\ \middle|\ N|c,\ a\equiv d\equiv 1 \bmod N\right\}\\
\Gamma(N) &= \left\{\quad''\quad\ \middle|\ N|b,c,\ a\equiv d\equiv 1 \bmod N\right\}.
\end{aligned}$$