<u>Satz</u> Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ operiert auf dem von den Reihen $\vartheta_{g+\Gamma,P}$ $(g\in\Gamma^*)$ aufgespannten Raum. Genauer gilt: Ist $g\in\Gamma^*$, $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z})$, $c>0$, so hat man

$$(*)\quad \vartheta_{g+\Gamma,P}\Big|_k A = \sum_{\nu\in\Gamma^*/\Gamma}\left\{\frac{e^{-\pi i b(2g\cdot\nu+d\nu^2)}}{v(\Gamma)\,c^{n/2}\,i^{k+\underline{d}}}\sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \lambda\equiv g+d\nu(\Gamma)}} e^{\pi i\frac{a}{c}\lambda^2}\right\}\vartheta_{\nu+\Gamma,P}\ \Bigg|_{\underline{d}=\operatorname{grad}P}$$

<u>Bemerkung</u>: 1) Eine entsprechende Formel (*) für ein A mit $c<0$ kann man ~~sofort~~ leicht aus (*) ableiten, indem man $\vartheta_{g+\Gamma,P}|_k A = (-1)^k\,\vartheta_{g+\Gamma,P}|_k(-A)$ benützt. Eine Formel (*) für A mit $c=0$ kann man sofort hinschreiben (vgl. (T1)).
2.) A priori gibt es $|\Gamma^*/\Gamma|$-viele Reihen $\vartheta_{g+\Gamma,P}$. Im allgemeinen ist aber die Dimension des von diesen Reihen ~~ϑ_g~~ aufgespannten Raums kleiner. Ist z.B. $\operatorname{grad}P=\underline{d}$ ungerade, so ist $\vartheta_{\Gamma,P}\equiv 0$ (Übungsaufgabe), ferner ist stets $\vartheta_{g+\Gamma,P}=(-1)^{\underline{d}}\,\vartheta_{-g+\Gamma,P}$.

<u>Beweis</u> Der Trick zum Beweis von (*) ist zunächst

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{a}{c}-\frac{1}{c(c\tau+d)}$$

und

$$\vartheta_{g+\Gamma,P} = \sum_{\substack{\star\in\Gamma^*/c\Gamma\\ \star\equiv g(\Gamma)}}\vartheta_{\star+c\Gamma,P}$$

zu schreiben. Es ist nämlich für $x\in\star+c\Gamma$ stets $e^{\pi i\frac{a}{c}x^2}=e^{\pi i\frac{a}{c}\star^2}$ und daher

$$\vartheta_{\star+c\Gamma,P}\left(\frac{a}{c}-\frac{1}{c(c\tau+d)}\right) = e^{\pi i\frac{a}{c}\star^2}\,\vartheta_{\star+c\Gamma,P}\left(\frac{-1}{c(c\tau+d)}\right).$$

Auf die rechts stehende Reihe kann man nun (T2) (mit $c\Gamma$ statt Γ) anwenden:

$$\vartheta_{\star+c\Gamma,P}\left(\frac{-1}{c(c\tau+d)}\right) = [c(c\tau+d)]^k\, i^{-(k+\underline{d})}\,v(c\Gamma)^{-1}\sum_{\mu\in(c\Gamma)^*/c\Gamma} e^{2\pi i\lambda\cdot\mu}\,\vartheta_{\mu+c\Gamma}(c^2\tau+cd).$$