Thetareihen als Modulformen

Wir setzen von jetzt ab voraus, daß $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein ganzes und gerades Gitter ist, d.h. $x \cdot y \in \mathbb{Z}$, $x^2 \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x, y \in \Gamma$ gilt. Dann ist $\Gamma \subseteq \Gamma^*$.

Ferner gilt:

~~Sind~~ $y_1, y_2 \in \Gamma^*$ mit $y_1 \equiv y_2 \mod \Gamma$, so ist $y_1^2 \equiv y_2^2 \mod 2\mathbb{Z}$ und $x \cdot y_1 \equiv x \cdot y_2 \mod \mathbb{Z}$ für jedes $x \in \Gamma$.

Wir werden dies im Folgenden häufig stillschweigend benutzen.
Insbesondere erhält man damit für jedes fest gewählte $\varrho \in \Gamma^*$:

$$\text{(T1)} \qquad \vartheta_{\varrho+\Gamma, P}(\tau+1) = e^{\pi i \varrho^2}\, \vartheta_{\varrho+\Gamma, P}(\tau)$$

und mit der Formel im zuletzt ausgesprochenen Satz

$$\text{(T2)} \qquad \vartheta_{\varrho+\Gamma, P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{\,n+2d}\, i^{-d}\, v(\Gamma)^{-1} \sum_{\sigma \in \Gamma^*/\Gamma} e^{2\pi i \varrho \cdot \sigma}\, \vartheta_{\sigma+\Gamma, P}(\tau).$$

Hierbei bedeutet "$\sigma \in \Gamma^*/\Gamma$" in etwas mißbräuchlicher Notation, daß σ ein volles Repräsentantensystem für die Nebenklassen in Γ^*/Γ durchlaufen soll.
Wir setzen von jetzt ab voraus, daß n gerade ist. Sei

$$\cancel{n = 2k}\,.\quad k = \frac{n}{2} + d$$

Ist $f(\tau)$ eine in der oberen Halbebene definierte Funktion und $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, so setzen wir

$$(f|_k A)(\tau) := f(A\tau)(c\tau+d)^{-k}.$$

Hierdurch wird eine Operation von $SL_2(\mathbb{R})$ auf dem Raum aller Funktionen auf $\mathfrak{H}$ definiert.

Wir werden jetzt zeigen: