<u>Satz</u> $\vartheta_\Gamma\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{\,n} v(\Gamma)^{-1}\, \vartheta_{\Gamma^*}(\tau)$.

Ist Γ unimodular (d.h. $\Gamma^* = \Gamma$) und überdies ganz und gerade (was $\vartheta_\Gamma(\tau+1) = \vartheta_\Gamma(\tau)$ impliziert), so wäre es jetzt leicht aus dem Satz zu folgern, daß $8 \mid n$ gilt und $\vartheta_\Gamma\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{n/2}\, \vartheta_\Gamma(\tau)$ für alle $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in Sl_2(\mathbb{Z})$ ist, d.h. ϑ_Γ eine Modulform für die Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht $\frac{n}{2}$ ist. Wir wollen uns aber nicht auf unimodulare Γ beschränken, sondern eine allgemeiner gültige Theorie vorstellen. Überdies legt die Zeile E der Tabelle nahe, zugleich auch noch etwas verallgemeinerte Thetareihen zu betrachten.

Ein Polynom $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ heißt sphärisch vom Grad d, falls es sich als Linearkombination von Polynomen der Gestalt $(\xi \cdot x)^d$ mit $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi^2 = 0$ falls $d \geq 2$ schreiben läßt.

Obwohl es im Folgenden nicht benötigt wird, merken wir an, daß ein Polynom $P(x)$ genau dann sphärisch ist, wenn $\Delta P = 0$ gilt $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$.

Für ein sphärisches Polynom $P(x)$ vom Grad d und ein $z \in \mathbb{R}^n$ setzen wir jetzt

$$\vartheta_{z+\Gamma, P}(\tau) := \sum_{x \in z+\Gamma} P(x)\, e^{\pi i \tau x^2} = \sum_{x \in \Gamma} P(x+z)\, e^{\pi i \tau (x+z)^2}.$$

Dann ist $\vartheta_{z+\Gamma, P}(\tau)$ wieder eine in $\tau \in \mathfrak{h}$ holomorphe Funktion und mit der Poissonschen Summenformel gilt in Verallgemeinerung des zuletzt ausgesprochenen Satzes:

<u>Satz</u> $\vartheta_{z+\Gamma, P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}^{\,n+2d}\, i^{-d}\, v(\Gamma)^{-1} \sum_{y \in \Gamma^*} P(y)\, e^{\pi i \tau y^2} e^{2\pi i z \cdot y}$.