Beweis der Tabelle:

Nach dem Lemma ist

(0) $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx = e^{-\pi y^2}.$$

Substituieren wir $\frac{x}{\sqrt{v}} \to x$, $\sqrt{v}\,y \to y$ für $v \in \mathbb{R}, v > 0$, so erhalten wir A für $\tau = iv$, d.h. es gilt

(1) $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\pi i}{\tau} x^2} e^{-2\pi i xy}\,dx = \sqrt{\tfrac{\tau}{i}}^{\,n} e^{\pi i \tau y^2}$$

für $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$. Nun definiert aber sowohl die linke Seite als auch die rechte Seite von (1) eine holomorphe Funktion in $\tau \in \mathfrak{H}$. Da diese beiden Funktionen auf $i\mathbb{R}_{>0}$ übereinstimmen, müssen sie dann überhaupt identisch sein.

B folgt sofort aus (1), indem man im Integral die Substitution $x + z \to x$ durchführt.

Wendet man auf beide Seiten von (0) den Differentialoperator $P(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots)$ an, und benutzt man die offensichtliche Identität

$$P\left(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y_n}\right) e^{-2\pi i x\cdot y} = P(x)\, e^{-2\pi i x\cdot y},$$

so hat man C.

D ist ein Spezialfall von C, wobei man noch

$$\left(\frac{-1}{2\pi i}\, \xi\cdot\nabla\right)^d e^{-\pi y^2} = \left(\frac{\xi\cdot y}{i}\right)^d e^{-\pi y^2} \qquad \left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)\right)$$

zu benutzen hat. Dies folgt sofort durch Induktion über d unter Ausnutzung von $\xi^2 = 0$.

E folgt aus D ganz analog wie die ~~zur~~ Herleitung von B aus (0).

Ähnlich wie bei der oben gegebenen Abschätzung der $\vartheta_p(\tau)$ definierenden Reihe zeigt man, daß alle in der Tabelle auftretenden Funktionen $g(x)$ den Voraussetzungen zur Anwendung der Poissonschen Summenformel genügen. Wendet man diese an, so erhält man etwa aus A die Identität