Wir haben schon bewiesen, daß

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} f_T(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}_T(y).$$

Aber

$$\hat{f}_T(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_T(x)\, e^{-2\pi i x\cdot y}\, dx$$

$$= |\det T|^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-2\pi i (T^{-1}t)\cdot y}\, dx \qquad (t = Tx)$$

$$= v(\Gamma)^{-1}\, \hat{f}\left((T^t)^{-1} y\right),$$

und

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}\left((T^t)^{-1}y\right) = \sum_{y\in(T^t)^{-1}\mathbb{Z}^n} \hat{f}(y) = \sum_{y\in\Gamma^*} \hat{f}(y).$$

Thetareihen, sphärische Polynome

Zu einem gegebenen Gitter Γ setzen wir

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i \tau x^2}.$$

Offenbar ist die Reihe gleichmäßig absolut konvergent in $\{\tau\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau \geq v_0\}$ für jedes $v_0 > 0$:

$$\sum_{x\in\Gamma} |e^{\pi i\tau x^2}| \leq \sum_{x\in\Gamma} e^{-\pi v_0 x^2} \leq \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\pi v_0 l}\, \#\{x\in\Gamma \mid l \leq x^2 < l+1\} < \text{const.} \sum_{l=0}^{\infty} l^{n/2} e^{-\pi v_0 l},$$

wobei $\#\{x\in\Gamma \mid x^2 \leq l\} \sim \dfrac{\operatorname{vol}(\{x\in\mathbb{R}^n \mid x^2\leq l\})}{v(\Gamma)} = \text{const.}\cdot l^{n/2}$

benutzt wurde. Demnach ist $\vartheta_\Gamma(\tau)$ eine in der oberen Halbebene $\mathfrak{H} := \{\tau\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ erklärte und dort holomorphe Funktion.