Beweis: Wir beweisen diese Formel zunächst für den Fall $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Dann ist die oben betrachtete Funktion $F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x+z)$ also stetig und periodisch in jeder Variablen mit der Periode 1. Die $F(z)$ zugeordnete Fourierreihe ist

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^n} a(y)\, e^{2\pi i z \cdot y} \quad \text{mit} \quad a(y) = \int_{[0,1]^n} F(t)\, e^{-2\pi i t \cdot y}\, dt.$$

Wir werden zeigen, daß

$$(*) \qquad a(y) = \hat{f}(y)$$

gilt. Wegen (V3) ist dann aber die $F(z)$ zugeordnete Fourierreihe absolut und gleichmäßig konvergent, konvergiert also gegen eine stetige Funktion, die nach bekannten Sätzen mit $F(z)$ übereinstimmt:

$$F(z) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(y)\, e^{2\pi i z \cdot y}.$$

Für $z = 0$ ist dies gerade die zu beweisende Formel.

Die Identität $(*)$ ergibt sich mit folgender Rechnung:

$$a(y) = \int_{[0,1]^n} F(t)\, e^{-2\pi i t \cdot y}\, dt = \int_{[0,1]^n} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x+t)\, e^{-2\pi i t \cdot y}\, dt$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} f(x+t)\, e^{-2\pi i t \cdot y}\, dt \qquad (\text{Vertauschung wegen (V2) } \cancel{\text{unter Ausnutzung}} \text{ gerechtfertigt})$$

$$= \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \int_{x+[0,1]^n} f(t)\, e^{-2\pi i t \cdot y}\, dt \qquad (x+t \to t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-2\pi i t y}\, dt = \hat{f}(y).$$

Um nun den allgemeinen Fall zu beweisen, schreiben wir

$$\sum_{x \in \Gamma} f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f_T(x)$$

mit $T = (g_1 \cdots g_n)^t$, wenn $\Gamma = \mathbb{Z} g_1 + \dots + \mathbb{Z} g_n$, d.h. $\Gamma = T\mathbb{Z}^n$ gilt, und mit $f_T(x) := f(Tx)$.