Vorlesungsvertretung Hirzebruch WS 86/87

Poissonsche Summenformel

Im Folgenden notieren wir die Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren, und für zwei solche Spaltenvektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

setzen wir wie üblich

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n .$$

Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter, d.h. $\Gamma = \mathbb{Z} g_1 + \dots + \mathbb{Z} g_n$ für eine geeignete Basis $g_1, \dots, g_n$ des $\mathbb{R}^n$.

Für ein solches Gitter Γ setzen wir stets

$$v(\Gamma) := \text{Volumen einer Fundamentalmasche von } \Gamma .$$

Als Fundamentalmasche von Γ bezeichnet man dabei jede Menge der Gestalt

$$\{ x_1 g_1 + \dots + x_n g_n \mid 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1 \},$$

wo $g_1, \dots, g_n$ ~~wie~~ oben ist. Offenbar ist also

$$v(\Gamma) = |\det(g_1 \cdots g_n)|,$$

woraus man auch leicht folgert, daß $v(\Gamma)$ unabhängig von der Wahl der Fundamentalmasche ist.

Schließlich bezeichnet Γ^* stets das zu Γ duale Gitter:

$$\Gamma^* = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot y \in \mathbb{Z} \text{ für alle } x \in \Gamma \}.$$

Man zeigt leicht, daß

$$\Gamma^* = \mathbb{Z} g_1^* + \dots + \mathbb{Z} g_n^*$$

gilt, wenn $g_1^*, \dots, g_n^*$ die zu $g_1, \dots, g_n$ duale Basis bezeichnet, d.h.

$$(g_1^* \cdots g_n^*)^t = (g_1 \cdots g_n)^{-1}$$

ist. Insbesondere folgt hieraus, daß Γ^* tatsächlich ein Gitter ist.