$$\tilde{\Gamma} = \{ y \in V \mid tr_{V/\mathbb{Q}} \frac{y \cdot \overline{(1-\vartheta)}}{p} \in \mathbb{Z} \} = \left(\frac{\widetilde{1-\vartheta}}{p}\right) = \left(\frac{1-\vartheta}{p}\right)^{-1} \mathcal{D}_V^{-1} = \mathcal{O}_V$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{D}_k^{-1} \operatorname{ggt}\left(\frac{v \cdot \bar{v}}{p} \mid v \in \mathcal{O}_V\right)^{-1} = \mathcal{D}_k^{-1} p \quad , \text{ da } 1 \in \operatorname{ggt}\left(\frac{v \cdot \bar{v}}{} \mid v \in \mathcal{O}_V\right) \equiv \mathcal{O}_k .$$

$$\Delta(\Gamma) = |\tilde{\Gamma}/\Gamma| = |\mathcal{O}_V/(1-\vartheta)| = p \quad = \left((1-\vartheta)(1-\bar{\vartheta})^{\frac{3-p}{2}} + \frac{p-1}{2} = (1-\vartheta)(1-\bar{\vartheta})\right)$$

$\tilde{\Gamma}/\Gamma = \mathcal{O}_V/(1-\vartheta)$ ist $p$-elementig, Repräsentanten $0, 1, \ldots, p-1$

$$\mathcal{O}_k/\mathcal{L} \cong \mathbb{F}_p \, , \quad \chi(q) = \left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \, , \text{ also } \chi(d) = \left(\frac{d}{p}\right)$$

also

$SL_2 \mathcal{O}_k$ operiert auf $\vartheta_{(1-\vartheta)}, \vartheta_{1+(1-\vartheta)}, \ldots, \vartheta_{\frac{p-1}{2}+(1-\vartheta)}$ (bzgl. "$|_1$"); diese Operation faktorisiert zu einer Operation von $SL_2(\mathbb{F}_p)$ (sogar $PSL_2(\mathbb{F}_p)$ für $p \equiv 1 \ (4)$, denn hier ist $\vartheta|_1\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \vartheta$ ). Es gilt

$$\vartheta_{(1-\vartheta)} |_1 A = \left(\frac{d}{p}\right) \vartheta_{(1-\vartheta)} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} * & * \\ * & d\end{pmatrix} \in \Gamma_1(\mathcal{L}) .$$

Diese Theorie vermittelt uns also gewisse Darstellungen $(\Theta_p, \delta_p)$ von $SL_2(\mathbb{F}_p)$ (Darstellung $(V, \rho)$ von $G$ = $\mathbb{C}$-VR $V$ + Gruppenhom. $\rho: G \to \operatorname{Aut}(V)$).

Wir können auf eine rein

<u>gruppentheoretische Beschreibung von $SL_2(\mathbb{F}_p)$</u>

gehen.

Betrachte den Charakter $\chi: \underbrace{\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_p)\}}_{G_0} \longrightarrow \{\pm 1\}$, $\chi\left(\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right) = \left(\frac{d}{p}\right)$.

Sei $(V, \rho)$ = die von $\chi$ induzierte Darstellung von $SL_2(\mathbb{F}_p)$:

$$V = \{ f: SL_2(\mathbb{F}_p) \to \mathbb{C} \mid f(g x) = \left(\frac{d}{p}\right) f(x) \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in G_0 \},$$

$$(\rho(g) f)(x) := f(x g).$$

Offenbar ist $\dim_{\mathbb{C}} V = \# SL_2(\mathbb{F}_p)/G_0 = \frac{p(p^2-1)}{p(p-1)} = p+1.$