Korollar 2. Sei $A \in \Gamma_0(\mathfrak{L})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $c, d \neq 0$. Dann gilt

(*) $$\varepsilon(A) = \Delta(\Gamma)^{-1/2}\, i^{-rn/2}\, n(c)^{-r/2} \sum_{w \in \Gamma/c\Gamma} e^{\pi i \operatorname{tr} \frac{a}{c} w^2} = n(d)^{-r/2} \sum_{w \in \Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \operatorname{tr}(\frac{b}{d} w^2)}$$

Beweis (Skizze): ~~Beachte $\vartheta_\Gamma|_{1/2} A = \vartheta_\Gamma|_{1/2}$~~ Schreibe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und berechne hiermit $\vartheta_\Gamma|_{1/2} A$ durch zweimalige Anwendung des Satzes 2.

Damit erhält man nun:

Proposition: Es gibt einen Charakter $\chi : (\mathcal{O}/\mathfrak{L})^\times \longrightarrow \{\pm 1\}$, sodass

$$\varepsilon\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(d \bmod \mathfrak{L}) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(\mathfrak{L}).$$

Ist $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl ~~$\neq 2$~~ $(p, \mathfrak{L}) = 1$, so gilt $\chi(p) = \left(\frac{(-1)^{rn/2}\Delta(\Gamma)}{p}\right)$ (= Legendre-Symbol).

Bemerkung: (i) Es ist klar, dass ~~bei~~ im Fall $K = \mathbb{Q}$ die Formel f. $\chi(p)$ den Charakter χ eindeutig bestimmt.
(ii) Im allgemeinen impliziert die Proposition, dass die zweite Summe in (*) gar nicht von b abhängt, und dass $\chi(d \bmod \mathfrak{L}) = n(d)^{-r/2} \sum_{w \in \Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \operatorname{tr} \frac{1}{d} w^2}$.

Beweis (nur für den Fall $K = \mathbb{Q}$):

Wir zeigen zunächst: $\varepsilon(A) = 1$ für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(\mathfrak{L})$:

~~[illegible]~~

da O.B.d.A. $d \neq 0$ (~~[illegible]~~ sonst betrachte $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ anstelle von A!)

Dann

$$n(d)^{-r/2} \sum_{w \in \Gamma/d\Gamma} e^{\pi i \operatorname{tr} \frac{w^2}{d}} = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-d & d \end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-d & 1 \end{pmatrix} \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$ durch mehrmalige Anwendung von (*).

Da $(b, d) = 1$ definiert $e^{2\pi i \frac{1}{d}} \to e^{2\pi i \frac{b}{d}}$ einen Automorphismus ω von $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/d})$, also

$$1 = \omega(1) = \omega\Big(n(d)^{-r/2} \sum e^{\pi i \frac{w^2}{d}}\Big) = n(d)^{-r/2} \sum e^{\pi i \frac{b w^2}{d}} = \varepsilon(A).$$

Wir definieren nun χ durch das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_0(\mathfrak{L}) \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d] & \mathbb{C}^\times \\ \Gamma_0(\mathfrak{L})/\Gamma_1(\mathfrak{L}) \arrow[ur, dashed, "\chi"'] \arrow[d, "d \bmod \mathfrak{L}"'] & \\ (\mathcal{O}/\mathfrak{L})^\times & \end{tikzcd}$$