ad (iii) $n(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}$ (denn $n(\mathcal{L})\,\mathcal{O}/\mathcal{L} = 0$, d.h. $n(\mathcal{L})\,\mathcal{O} \subseteq \mathcal{L}$),
also $n(\mathcal{L})\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ nach (ii), daher $e \mid n(\mathcal{L})$.

$\mathrm{tr}\, 2e\,\mathcal{O}\frac{v^2}{2} \subseteq \mathbb{Z}$ für $v \in \tilde{\Gamma}$, da $ev \in \Gamma$, also $2e \in \mathcal{L}$, d.h. $\mathcal{L} \mid 2e$.

Ist e ungerade, so $\mathrm{tr}\, e^2\mathcal{O}\frac{v^2}{2} \in \mathbb{Z}$ f. alle $v \in \tilde{\Gamma}$, da $e\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Also
$\mathrm{tr}\, e\,\mathcal{O}\frac{v^2}{2} \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$ f. $v \in \tilde{\Gamma}$. Aber auch $\mathrm{tr}\, e\,\frac{\mathcal{O}v^2}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, also $\mathrm{tr}\, e\,\frac{\mathcal{O}v^2}{2} \in \frac{1}{e}\mathbb{Z} \cap \frac{1}{2}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$
f. alle $v \in \tilde{\Gamma}$, also $e \in \mathcal{L}$.

ad (iv) $\Gamma = \tilde{\Gamma} \Rightarrow e = \exp. = 1$, also $\mathcal{L} \mid 1$, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{O}$. Ist $\mathcal{L} = \mathcal{O}$, so $e \mid n(\mathcal{L}) = 1$, also $e = 1$,
d.h. $\Gamma = \tilde{\Gamma}$.

Wir kommen nun zu unserem Korollar zurück. Sei

$$\Gamma_0(\mathcal{L}) := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}) \;\middle|\; c \in \mathcal{L} \right\}$$

$$\Gamma_1(\mathcal{L}) = \qquad " \qquad a \equiv d \equiv 1 \bmod \mathcal{L},\ c \in \mathcal{L} \}$$

$$\Gamma(\mathcal{L}) = \qquad " \qquad A \equiv 1 \bmod \mathcal{L} \}$$

Offenbar sind dies alles Untergruppen von $SL_2(\mathcal{O})$ und

$$\Gamma(\mathcal{L}) \subseteq \Gamma_1(\mathcal{L}) \subseteq \Gamma_0(\mathcal{L}) \subseteq SL_2(\mathcal{O}).$$

Ferner hat ~~man~~ man

$$\Gamma(\mathcal{L}) \underset{\text{endl. Index}}{\subseteq} SL_2(\mathcal{O}),$$

denn

$$\begin{tikzcd}
SL_2(\mathcal{O}) \arrow[r, "A \mapsto A \bmod \mathcal{L}"] \arrow[d] & SL_2(\mathcal{O}/\mathcal{L}) \\
SL_2(\mathcal{O})/\Gamma(\mathcal{L}) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach Korollar 1 haben wir nun insbesondere

$$\vartheta_\Gamma \big|_{v/2} A = \varepsilon(A)\, \vartheta_\Gamma \qquad \text{für } A \in \Gamma_0(\mathcal{L}).$$

Also: ε definiert einen Gruppenhomomorphismus

$$\varepsilon : \Gamma_0(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Um weitere Aussagen über ε zu erhalten, ist es bequem noch eine andere Formel für $\varepsilon(A)$ herzuleiten.