Proposition

(i) Sei $\mathcal{N} := \mathrm{ggT}(\frac{v^2}{2} \mid v\in\tilde\Gamma)$ (= der von allen $\frac{v^2}{2}$ ($v\in\tilde\Gamma$) erzeugte $\mathcal{O}$-Untermodul von k).
Dann ist $\mathcal{N}$ ein ~~ganz~~ gebr. Ideal.

(ii) Für die Stufe $\mathcal{L}$ von Γ gilt:
$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{N}^{-1}\mathcal{D}^{-1}, \quad \mathcal{L}\tilde\Gamma \subseteq \Gamma.$$

(iii) Für die Norm $n(\mathcal{L})$ ($:= |\mathcal{O}/\mathcal{L}|$) von $\mathcal{L}$ ~~gilt~~ und $e :=$ (Exponent der endlichen abelschen Gruppe $\tilde\Gamma/\Gamma$) gilt:
~~(Exponent der endl. abelschen Gruppe $\tilde\Gamma/\Gamma$)~~, $e \mid n(\mathcal{L})$, $\mathcal{L} \mid m\cdot e$
wo $m\in\{1,2\}$, $m=1$ falls $|\tilde\Gamma/\Gamma|$ ungerade.

(iv) $\mathcal{L} = \mathcal{O} \iff \Gamma = \tilde\Gamma$

Bemerkung $|\tilde\Gamma/\Gamma| = \Delta(\Gamma)$. ($\Gamma = \mathbb{Z}e_1+\dots+\mathbb{Z}e_m$, bezgl. der Basis $e_1,\dots,e_m$ der $\mathbb{Q}$-VR V, $V \approx \mathbb{Q}^m$, dabei $\Gamma \approx \mathbb{Z}^m$, $\tilde\Gamma \approx F^{-1}\mathbb{Z}^m$, wo $F = (\mathrm{tr}\, e_i\cdot e_j)$, also $\Delta(\Gamma) = \det|F| = |\tilde\Gamma/\Gamma|$, letzteres nach Elementarteilersatz)

Beweis

ad(i): Wir haben zu zeigen, daß $\mathcal{N}$ endlich erzeugt ist: Sei $\tilde\Gamma = \mathcal{O}v_1+\dots+\mathcal{O}v_t$ (geeignete $v_i\in\tilde\Gamma$), dann $\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{t}\mathcal{O}\frac{v_i^2}{2} + \sum_{i,j=1}^{t}\mathcal{O}\,v_i\cdot v_j$ ("$\subseteq$": $v = \sum_i \gamma_i v_i$, $v\in\tilde\Gamma$, $\gamma_i\in\mathcal{O}$, so $\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\sum \gamma_i\gamma_j\, v_i\cdot v_j \in$ rechte Seite; "$\supseteq$": $\frac{v_i^2}{2}\in\mathcal{N}$, und $v_i\cdot v_j = \frac{(v_i+v_j)^2}{2} - \frac{v_i^2}{2} - \frac{v_j^2}{2} \in \mathcal{N}$)

ad(2): $\mathcal{L} \subseteq \tilde{\mathcal{N}} = \{\gamma\in k \mid \mathrm{tr}\,\gamma\mathcal{N} \subseteq \mathbb{Z}\}$ klar nach Definition von $\mathcal{L}$.
Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion ist zu zeigen, daß $\tilde{\mathcal{N}}$ ganzes Ideal ist:
Zunächst ist $\tilde{\mathcal{N}}\tilde\Gamma \subseteq \tilde{\tilde\Gamma}$: $\gamma\in\tilde{\mathcal{N}}$, $v,w\in\tilde\Gamma$, so $\mathrm{tr}\,\gamma v\cdot w = \mathrm{tr}\,\gamma\left(\frac{(v+w)^2}{2} - \frac{v^2}{2} - \frac{w^2}{2}\right) \in \mathbb{Z}$,
d.h. $\gamma v \in \tilde{\tilde\Gamma}$. Aber $\tilde{\tilde\Gamma} = \Gamma$, also

(*) $\tilde{\mathcal{N}}\tilde\Gamma \subseteq \Gamma$,

was auch die zweite Behauptung impliziert, sobald wir $\tilde{\mathcal{N}} = \mathcal{L}$ nachgewiesen haben.

Aus (*) folgt aber sofort, daß $\tilde{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{O}$: ist $\gamma\in\tilde{\mathcal{N}}$, $\Gamma = \mathbb{Z}e_1+\dots+\mathbb{Z}e_m$, so $\gamma e_i = \sum t_{ij}e_j$ mit geeignetem $t_{ij}\in\mathbb{Z}$, also $\det(t_{ij} - \delta_{ij}\gamma) = 0$, also $\gamma\in\mathcal{O}$.