 Vorlesungsvertretung Hirzebruch WS 86/87

Wir hatten letztesmal betrachtet:

K tot. reell. Zahlkörper, $\dim_{\mathbb{Q}} K = n$, $(V,\cdot)$ = "K-VR V mit $\dim_K V = r$" + "total pos. def. Skalarprodukt '$\cdot$'"; $\Gamma \subseteq V$ ein K-Gitter ($\mathcal{O}$-Modul, enthält Basis von V), ganz ($\mathrm{tr}\, \Gamma.\Gamma \subseteq \mathbb{Z}$), gerade $\mathrm{tr}\, \mathcal{O}\frac{v^2}{2} \subseteq \mathbb{Z}$ für alle $v \in V$.

Für $v \in \tilde{\Gamma}\ (= \{v \in V \mid \mathrm{tr}\, v.w \subseteq \mathbb{Z}\})$ setzten wir

$$\vartheta_{v+\Gamma}^{(z_1,\dots,z_n)} = \sum_{w \in v+\Gamma} e^{\pi i\, \mathrm{tr}\, z w^2} \qquad \Big(z_i \in \mathfrak{H},\ \mathrm{tr}\, z w^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j \sigma_j(w^2) \Big), \quad \sigma_1, \dots, \sigma_n : K \hookrightarrow \mathbb{R}$$

Wir zeigten dann

Satz $SL_2(\mathcal{O})$ operiert auf $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\vartheta_{v+\Gamma} \mid v \in \tilde{\Gamma}\}$ (bzgl. der Operation $(\vartheta, A) \mapsto \vartheta|_{r/2} A$) genauer:

$$\vartheta_{v+\Gamma}|_{r/2} A = \sum_{w \in \tilde{\Gamma}/\Gamma} \left\{ \begin{matrix} \text{explizit} \\ \text{gegebene} \\ \text{Skalare} \end{matrix} \right\} \vartheta_{w+\Gamma} \qquad (A \in SL_2(\mathcal{O}),\ v \in \tilde{\Gamma}).$$

Korollar Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O})$ mit $c\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$, $\mathrm{tr}\, ac\frac{v^2}{2} \in \mathbb{Z}$ f. alle $v \in \tilde{\Gamma}$ gilt

$$\vartheta_{v+\Gamma}|_{r/2} A = \varepsilon(A)\, e^{\pi i\, \mathrm{tr}\, ab v^2}\, \vartheta_{av+\Gamma}$$

wo

$$\varepsilon(A) = \begin{cases} D(\Gamma)^{-1/2}\, i^{-rn/2}\, n(c)^{-r/2} \sum_{w \in \Gamma/c\Gamma} e^{\pi i\, \mathrm{tr}\, \frac{a}{c} w^2} & \text{falls } c \neq 0 \\ n(a)^{r/2} & \text{falls } c = 0. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt das Korollar und seine Konsequenzen etwas genauer studieren.

Sei

$$\mathcal{L} := \{\gamma \in K \mid \mathrm{tr}\, \gamma\, \mathcal{O}\frac{v^2}{2} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } v \in \tilde{\Gamma}\} =: \text{Stufe des Gitters } \Gamma.$$

Wir werden gleich sehen, daß $\mathcal{L}$ ein ganzes Ideal ist, und gleichzeitig werden wir Formeln für $\mathcal{L}$ angeben. Beachte aber, wie genau dies den Fall $K = \mathbb{Q}$ verallgemeinert.