Zusammengefasst

$\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ ein endlich erzeugtes $\mathcal{O}$-Modul vom Rang m, $\mathcal{O}\cdot\mathbb{R} = \mathbb{R}^m$.

$$\tilde{\Gamma} = \{\mu \in \mathbb{R}^m \mid tr_{\mathfrak{K}/\mathbb{Q}}\, \mu\cdot\lambda \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \lambda \in \Gamma\}$$

$$= \{\mu \in \mathbb{R}^m \mid \mu\cdot\lambda \in \mathfrak{d}^{-1} \text{ für alle } \lambda \in \Gamma\}$$

$$\text{Stufe}(\Gamma) = \{c \in \mathcal{O} \mid tr(c a \lambda^2) \in 2\mathbb{Z} \text{ für alle } \lambda \in \tilde{\Gamma} \text{ und alle } a \in \mathcal{O}\} = \mathfrak{d}^{-1}\, ggt\left(\tfrac{\lambda^2}{2}, \lambda \in \tilde{\Gamma}\right)^{-1}$$

$=$

$N~~(\Gamma) = \{ggt(\lambda^2, \lambda \in \Gamma)\}~~$

Beispiel $\quad \mathfrak{P} \mid p$ in $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}) =: K$, $\mathfrak{K}$ (total)reelle Teilkörper. $\left(\mathfrak{P} = (1-\varphi),\ \varphi = e^{2\pi i/p}\right)$

Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathfrak{P} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \mapsto (\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x)$$

ein $\mathcal{O}$-Modul.

$$\tilde{\Gamma} = \{\mu \in \mathbb{R}^2 \mid tr_{K/\mathbb{Q}} \tfrac{\mu\bar{\lambda}}{\sqrt{p}} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \lambda \in \mathfrak{P}\} = \sqrt{p}\,\{\mu \in K \mid tr_{K/\mathbb{Q}}\, \mu\bar{\lambda} \in \mathbb{Z}\ \forall \lambda \in \mathfrak{P}\}$$

$$= \sqrt{p}\, \mathfrak{d}_K^{-1}\, \mathfrak{P}^{-1}$$

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{K}}^{-1}\, ggt\left(\tfrac{\lambda^2}{2} \mid \lambda \in \tilde{\Gamma}\right)^{-1} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{K}}^{-1}\, \frac{1}{p}\, N_{K/\mathfrak{K}}(\mathfrak{d}_K)\, N_{K/\mathfrak{K}}\, \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{K}},$$

denn

$tr\ \varphi$

$(1-\varphi^{-1})\varphi =$

$(1-\varphi)^{p-1}$

$(1-\varphi)^{p-2}$

$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\varphi)}/(1-\varphi)$

$\eta - \sum_{i=1}^{p-1} a_i \varphi^i = \eta \in (1-\varphi)$