Damit haben wir gemäß der Poissonschen Summenformel

$$\vartheta_{v_0+\Gamma}\left(\frac{-1}{z_1},\dots,\frac{-1}{z_n}\right) = (\det F)^{-1/2}\left(\frac{z_1}{i}\right)^{r/2}\cdots\left(\frac{z_n}{i}\right)^{r/2}\sum_{\eta\in F^{-1}\mathbb{Z}^{rn}} e^{2\pi i\,\xi_0^t F\eta}\, e^{\pi i\,\eta^t F(z_1,\dots,z_n)\eta}$$

$$= (\det F)^{-1/2}\left(\frac{z_1}{i}\right)^{r/2}\cdots\left(\frac{z_n}{i}\right)^{r/2}\sum_{v\in L(TF^{-1}\mathbb{Z}^{rn})} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}\, v_0 v}\, e^{\pi i\,\mathrm{tr}(z v^2)}.$$

Es ist aber $L(TF^{-1}\mathbb{Z}^{rn}) = \tilde{\Gamma}$:

Sei $v = L(T\xi)$, dann gilt

$$\mathrm{tr}\, v.\Gamma \subseteq \mathbb{Z} \iff \xi^t F\mathbb{Z}^{rn} \subseteq \mathbb{Z} \iff F\xi\in\mathbb{Z}^{rn} \iff \xi\in F^{-1}\mathbb{Z}^{rn}.$$

Damit folgt die behauptete Formel.

3.) <u>Thetareihen als Modulformen</u>

Wir nehmen jetzt noch an:

Γ ist ganz (d.h. $\mathrm{tr}\,\Gamma.\Gamma \subseteq \mathbb{Z}$) und gerade (d.h. $\mathrm{tr}\, v^2 \in 2\mathbb{Z}$ für alle $v\in\Gamma$),

$r = \dim_K V$ ist gerade.

Die erste Annahme bewirkt, daß für $v, w\in\tilde{\Gamma}$ die Ausdrücke $e^{2\pi i\,\mathrm{tr}\, v.w}$, $e^{\pi i\,\mathrm{tr}\, v^2}$ nur von v, w modulo Γ abhängen.

Die zweite bewirkt, daß durch

$$(f, A) \longmapsto (f|_{r/2}A)(z_1,\dots,z_n) := \prod_{i=1}^{n}(\sigma_i(c)z_i+\sigma_i(d))^{-r/2} f(\sigma_1(A)z_1,\dots,\sigma_n(A)z_n)$$

(f Funktion auf $\mathfrak{H}^n$, $A = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in SL_2(K)$) eine Operation von $SL_2(K)$ auf den Raum aller in $\mathfrak{H}^n$ definierten Funktionen erklärt wird.

Es gilt nun für jedes $v\in\tilde{\Gamma}$:

$$\vartheta_{v+\Gamma}|_{r/2}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = i^{-rn/2}\, D(\Gamma)^{-1/2}\sum_{w\in\tilde{\Gamma}/\Gamma} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}\, v.w}\,\vartheta_{w+\Gamma} \quad \text{(nach Seite 1)},$$

$$\vartheta_{v+\Gamma}|_{r/2}\begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix} = n(a)^{r/2}\, e^{\pi i\,\mathrm{tr}(ab v^2)}\,\vartheta_{av+\Gamma} \quad \text{für } \begin{pmatrix}a&b\\0&a^{-1}\end{pmatrix}\in SL_2(\mathcal{O})$$

(elementar nachrechnen; beachte $a\in\mathcal{O}^\times$, daher $n(a) = \pm 1$)