~~Dann~~:

(Man zeigt leicht, daß $\mathfrak{l}\tilde{\Gamma} \subseteq \tilde{\tilde{\Gamma}} = \Gamma$, also $\mathfrak{l}^2\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{ggt}\left(\frac{v^2}{2} \,\middle|\, v \in \Gamma\right) \subseteq \mathfrak{D}^{-1}$, also $\mathfrak{l} \subseteq \mathcal{O}$)

Damit ~~ist~~ dann

$$\Gamma_0(\mathfrak{l}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathcal{O}) \,\middle|\, c \equiv 0 \ (\mathfrak{l})\right\}$$

$$\Gamma(\mathfrak{l}) = \left\{ \quad " \quad \,\middle|\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv 1 \ (\mathfrak{l})\right\}.$$

Damit sehen wir dann, daß

$$\vartheta_\Gamma \big|_{\frac{n}{2}} A = \varepsilon(A)\, \vartheta_\Gamma \quad f \ A \in \Gamma_0(\mathfrak{l}),$$

also ε definiert einen Charakter $\Gamma_0(\mathfrak{l}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.

Man kann zeigen: $\varepsilon(A) = \pm 1$ $\left(A \in \Gamma_0(\mathfrak{l})\right)$, $\varepsilon(A) = +1$ falls $A \in \Gamma(\mathfrak{l})$.

<u>Beispiel</u>

Sei p prim$^{\neq 2}$, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$,

$V = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})$, Skalarprodukt: $v.w := \frac{v\,\bar{w}}{p} + \frac{\bar{v}\,w}{p}$

$\Gamma = (1-\zeta)$.

Es ist $\tilde{\Gamma} = \left\{v \in \mathbb{Q}(e^{2\pi i/p}) \,\middle|\, tr_{\mathbb{Q}(e^{2\pi i/p})|\mathbb{Q}}\left(\frac{v\,(1-\bar{\zeta})}{p}\right) \in \mathbb{Z}\right\} = \left(\frac{1-\bar{\zeta}}{p}\right)^{-1} \mathcal{D}_{\mathbb{Q}(\zeta)}^{-1}$

$= \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta)}$, denn $p = (1-\zeta)^{p-1}$, $N_{\mathbb{Q}(\zeta)|\mathbb{Q}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}(\zeta)}) = p^{p-2}$, also $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}(\zeta)} = (1-\zeta)^{p-2}$.

Ein Repräsentantensystem für $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta)}/(1-\zeta)$ ist $0, 1, 2, \ldots, p-1$;

Somit haben wir

$Sl_2(\mathcal{O}_K)$ läßt den von den Reihen $\theta_j := \vartheta_{j+(1-\zeta)}$ aufgespannten Raum bei der "$|_1$"-Operation invariant.

$\mathfrak{l} =$ Stufe von $\Gamma = \mathcal{D}_K^{-1}\, \mathrm{ggt}\left(\frac{v.\bar{v}}{p} \,\middle|\, v \in (1-\zeta)\right)^{-1}$

$= \mathcal{D}_K^{-1}\left(\frac{1}{p}\,(2-\zeta-\zeta^{-1})\right)^{-1} = \mathcal{D}_K^{-1}\, p\,(2-\zeta-\zeta^{-1})^{-1}$, aber $p = (2-\zeta-\zeta^{-1})^{\frac{p-1}{2}}$,

$\mathcal{D}_K = (2-\zeta-\zeta^{-1})^{\frac{p-3}{2}}$, daher $\mathfrak{l} = (2-\zeta-\zeta^{-1})$.