Damit haben wir gemäß der Poissonschen Summenformel

$$\vartheta_{v_0+\Gamma}\left(-\frac{1}{z_1}, \dots, -\frac{1}{z_n}\right) = (\det F)^{-1/2}\left(\frac{z_1}{i}\right)^{r/2}\cdots\left(\frac{z_n}{i}\right)^{r/2}\sum_{\eta\in F^{-1}\mathbb{Z}^{rn}} e^{2\pi i\,\xi_0^t F\eta}\, e^{\pi i\,\eta^t F(z_1,\dots,z_n)\eta}$$

$$= (\det F)^{-1/2}\left(\frac{z_1}{i}\right)^{r/2}\cdots\left(\frac{z_n}{i}\right)^{r/2}\sum_{v\in L(TF^{-1}\mathbb{Z}^{rn})} e^{2\pi i\,\mathrm{tr}\, v_0\cdot v}\, e^{\pi i\,\mathrm{tr}(z v^2)}.$$

Aber $L(TF^{-1}\mathbb{Z}^{rn}) = \tilde{\Gamma}$: Sei $v = L(T\xi)$, dann gilt:
$\mathrm{tr}\, v\cdot\Gamma \subseteq \mathbb{Z} \iff \xi^t F\mathbb{Z}^{rn} \subseteq \mathbb{Z} \iff F\xi \in \mathbb{Z}^{rn} \iff \xi \in F^{-1}\mathbb{Z}^{rn}$.
Damit folgt die behauptete Formel.

3.) Thetareihen als Modulformen

Weitere Voraussetzung:

(iv) Γ sei ganz (d.h. $v\cdot w \in \mathcal{O}$ für alle $v, w \in \Gamma$) und gerade (d.h. $v^2 \in 2\mathcal{O}$ für alle $v \in \Gamma$).
Dann ist $\Gamma \subseteq \tilde{\Gamma}$ und für $v, w \in \tilde{\Gamma}$ hängen $e^{2\pi i\,\mathrm{tr}\, v\cdot w}$, $e^{\pi i\,\mathrm{tr}\, v^2}$ nur von v, w modulo Γ ab.

(v) r ~~gg~~ $\dim_K V$ sei gerade.

Ist f eine Fkt. auf $\mathfrak{H}^n$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(K)$, so wird dann durch

$$(f, A) \longmapsto (f|_{r/2}A)(z_1,\dots,z_n) = \prod_{i=1}^{n}(\sigma_i(c)z_i + \sigma_i(d_i))^{-r/2} f\left(\frac{\sigma_1(a)z_1+\sigma_1(b)}{\sigma_1(c)z_1+\sigma_1(d)}, \dots, \frac{\sigma_n(a)z_n+\sigma_n(b)}{\sigma_n(c)z_n+\sigma_n(d)}\right)$$

eine Operation von $SL_2(K)$ auf den Raum aller Fkt'en auf $\mathfrak{H}^n$ erklärt.

Satz 2 ~~$SL_2(\mathcal{O})$~~ Bei der "$|_{r/2}$"-Operation von $SL_2(\mathcal{O})$ bleibt der ~~Raum~~ von den Reihen $\vartheta_{v+\Gamma}$ $(v\in\tilde{\Gamma})$ aufgespannte Raum invariant. Genauer gilt für jedes $v \in \tilde{\Gamma}$ und jede $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O})$:

$$\vartheta_{v+\Gamma}|_{r/2}A =$$

(I)
$$= i^{-rn/2}\,\mathfrak{D}(\Gamma)^{-1/2}\,n(c)^{-\frac{r}{2}}\sum_{w\in\tilde{\Gamma}/\Gamma}\left(e^{-\pi i\,\mathrm{tr}(2b\,v\cdot w + bd\,w^2)}\sum_{\substack{v'\in\tilde{\Gamma}/c\Gamma\\ v'\equiv v+dw\,(\Gamma)}} e^{\pi i\,\mathrm{tr}\frac{a}{c}v'^2}\right)\vartheta_{w+\Gamma}$$