Beweis

Wähle K-Basis $v_1, \dots, v_r$ von V

$\mathbb{Q}$-Basis $x_1, \dots, x_n$ von K,

Dann ist $x_i \cdot v_j$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von V, d.h.

$$L : \mathbb{Q}^{rn} \longrightarrow V, \quad \varphi \longmapsto (v_1, \dots, v_n) \cdot (x_1 \varphi_1 + \dots + x_r \varphi_r) \qquad \left(\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \ \varphi_i \in \mathbb{Q}^r \right)$$

ist ein $\mathbb{Q}$-VR-Isomorphismus.

Nach dem Lemma ist $L^{-1}(\Gamma)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang rn. Also existiert ein $T \in Gl_{rn}(\mathbb{Q})$, so daß $L^{-1}(\Gamma) = T \mathbb{Z}^{rn}$.

Damit haben wir

$$\sum_{v \in v_0 + \Gamma} e^{\pi i \operatorname{tr} z v^2} = \sum_{\varphi \in \mathbb{Z}^{rn}} e^{\pi i (\varphi + \varphi_0)^t F(z_1, \dots, z_n)(\varphi + \varphi_0)}$$

wo

$$L(T\varphi_0) = v_0, \qquad F(z_1, \dots, z_n) = (GT)^t \begin{bmatrix} z_1 \sigma_1(M) & & & \\ & z_2 \sigma_2(M) & & \\ & & \ddots & \\ & & & z_n \sigma_n(M) \end{bmatrix} GT$$

mit $G = (\sigma_i(x_j) E_r)$, $M = (v_i \cdot v_j)$ ($E_r = r \times r$-Einheitsmatrix)

Es gilt offenbar: $\eta^t F \varphi = \operatorname{tr} LT(\eta) \cdot LT(\varphi)$ für alle $\eta, \varphi \in \mathbb{Q}^{rn}$, wo $F := F(1, \dots, 1)$.

Ist $\operatorname{Im} z_i > y_0$, $\varphi \in \mathbb{R}^{rn}$, so

$$\left| e^{\pi i \varphi^t F(z_1, \dots, z_n) \varphi} \right| = e^{-\pi \varphi^t \operatorname{Im} F(z_1, \dots, z_n) \varphi} < e^{-\pi y_0 \varphi^t F \varphi} < e^{-\pi y_0 \varepsilon \varphi^t \varphi}$$

mit geeignetem (von φ unabh.) $\varepsilon > 0$,

(~~Begründung der letzten~~ da F pos. def. nach Voraussetzung über "$\cdot$" auf V.

Damit folgt leicht der erste Teil des Satzes.

Der zweite folgt mit der Poissonschen Summenformel.

Wir werden zeigen, daß

$$\int_{\mathbb{R}^{rn}} e^{\pi i (\varphi + \varphi_0)^t F(-\frac{1}{z_1}, \dots, -\frac{1}{z_n})(\varphi + \varphi_0)} e^{-2\pi i \varphi^t \cdot \eta} \, d\varphi$$

$$= (\det F)^{-1/2} \left(\frac{z_1}{i}\right)^{r/2} \cdots \left(\frac{z_n}{i}\right)^{r/2} e^{2\pi i \varphi_0^t \cdot \eta} \, e^{\pi i (F^{-1}\eta)^t F(z_1, \dots, z_n) F^{-1} \eta}.$$