Daher ist jedes K-Gitter frei über $\mathbb{Z}$ vom Rang nr, wenn es nur irgendeines ist. Aber $\Gamma_1 := \mathcal{O} w_1 + \dots + \mathcal{O} w_r$ ($w_1, \dots, w_r$ eine Basis von V über k) hat offenbar Rang nr über $\mathbb{Z}$.

Es ist klar, daß $\tilde{\Gamma}$ ein $\mathcal{O}$-Modul ist. ~~...~~ Daß $\tilde{\Gamma}$ endlich erzeugt ist und eine K-Basis von V ~~...~~ enthält, folgt sofort mit Teil (i): Ist $\Gamma = \mathbb{Z} e_1 + \dots + \mathbb{Z} e_{rn}$, so ist $e_1, \dots, e_{rn}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von V und $\tilde{\Gamma} = \mathbb{Z} e_1^* + \dots + \mathbb{Z} e_{rn}^*$, wo e_i^* die $\mathbb{Q}$-Basis von V mit $tr(e_i \cdot e_j^*) = \delta_{ij}$ bedeutet.

Für gegebenes $v_0 \in V$ setzen wir nun:

(1) $$\vartheta_{v_0+\Gamma}(z_1, \dots, z_n) := \sum_{v \in v_0 + \Gamma} e^{\pi i \, tr(z v^2)} \qquad (z_1, \dots, z_n \in \mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}).$$

~~Mit der Konvention~~ $tr(z v^2) := z_1 \sigma_1(v \cdot v) + \dots + z_n \sigma_n(v \cdot v)$.

Schließlich sei noch
$\mathcal{D}(\Gamma) =$ Diskriminante von $\Gamma := \det(tr(e_i \cdot e_j))$, wo $\Gamma = \mathbb{Z} e_1 + \dots + \mathbb{Z} e_{rn}$.

Satz 1 Die in (1) auftretende Reihe konvergiert glm. absolut auf jeder Teilmenge $\subseteq \mathfrak{h}^n$ der Gestalt $\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{h}^n \mid \operatorname{Im} z_i \geq y_0\}$ ($y_0 \in \mathbb{R}^{>0}$); insbesondere wird durch (1) eine in $\mathfrak{h}^n$ holomorphe ~~...~~ Funktion erklärt.
Es gilt:

$$\vartheta_{v_0+\Gamma}\left(\frac{-1}{z_1}, \dots, \frac{-1}{z_n}\right) = \left(\frac{z_1}{i}\right)^{r/2} \cdots \left(\frac{z_n}{i}\right)^{r/2} \mathcal{D}(\Gamma)^{-1/2} \sum_{v \in \tilde{\Gamma}} e^{2\pi i \, tr(v \cdot v_0)} e^{\pi i \, tr(z v^2)}$$

(mit der Konv. $w^{r/2} := e^{\frac{r}{2}(\operatorname{Log}|w| + i \operatorname{Arg} w)}$ und $-\pi < \operatorname{Arg} w \leq +\pi$ für $w \in \mathbb{C}^*$).

$(\#\tilde{\Gamma}/\Gamma)^{-1/2}$ nr N $Tr($ $N($ Θ Θ $\Theta_{v_0+\Gamma}$