2.) K-Gitter und Thetareihen

Generelle Voraussetzung:

(i) K sei total reell (d.h. $\sigma_i(K) \subseteq \mathbb{R}$ für $i \in \{1,\dots,n\}$).

(ii) $(V, \cdot)$ sei ein Paar bestehend aus einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V, $r := \dim_K V$, und einem total positiv definitem Skalarprodukt "$\cdot$" (d.h. $\cdot : V \times V \to K$ sei bilinear, symmetrisch und für jedes $y \in K^{y \neq 0}$ ~~und~~ $1 \leq i \leq n$ sei $\sigma_i(y \cdot y) > 0$)

(iii) $\Gamma \subseteq V$ sei ein K-Gitter, d.h. ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$-Untermodul von V, der eine K-Basis von V enthält.

Einfachstes Beispiel für die Daten (ii), (iii) ist $(V, \cdot) = (K, \text{Multipl.})$, $\Gamma =$ gebrochenes Ideal ~~in~~ K.

Wir setzen

$$\tilde{\Gamma} := \{\tilde{v} \in V \mid tr(v \cdot \tilde{v}) \in \mathbb{Z}\}$$

$\tilde{\Gamma}$ heißt das zu Γ duale K-Gitter. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt durch ~~das~~ Aussage (ii) des folgenden Lemmas:

Lemma (i) Jedes K-Gitter in V ist freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $r \cdot n$.

(ii) $\tilde{\Gamma}$ ist K-Gitter.

Beweis Man überlegt sich, daß zu jedem Paar Γ_1, Γ_2 von K-Gittern eine ganze Zahl $N \in \mathbb{Z}^{>0}$ existiert, sodaß $N\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ (~~Ist~~ $\Gamma_1 = \mathcal{O}v_1 + \dots + \mathcal{O}v_t$, $\Gamma_2 = \mathcal{O}w_1 + \dots + \mathcal{O}w_u$, so enthalten die Mengen $\{v_1, \dots, v_t\}$, $\{w_1, \dots, w_u\}$ nach Def. von "K-Gitter" eine K-Basis ~~von~~ V. Sei $v_i = \sum_j y_{ij} w_j$ für geeignete (nicht notwendig eindeutige) $y_{ij} \in K$. Sei $N \in \mathbb{Z}^{>0}$, sodaß $Ny_{ij} \in \mathcal{O}$. Dann ist $Nv_i \in \Gamma_2$, also $N\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$.). Also sind sämtliche K-Gitter in V kommensurabel (~~Zu gegebenen Γ_1, Γ_2 wähle $N, N' \in \mathbb{Z}^{>0}$ mit $N\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$,~~ ~~$N'\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$. Dann folgt $NN'\Gamma_1 \subseteq N\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$, $NN'\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subseteq N\Gamma_1$~~

(Da Γ_1 endlich erzeugt ist, gilt $\# \Gamma_1 / N\Gamma_1 < \infty$. Aber $N\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$, also $\# \Gamma_1 / \Gamma_1 \cap \Gamma_2 < \infty$. Analog folgt $\# \Gamma_2 / \Gamma_1 \cap \Gamma_2 < \infty$).