1.) Algebraische Zahlkörper

Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ algebraischer Zahlkörper, d.h. $K = \mathbb{Q}(x)$, wo x Nullstelle eines Polynoms $\in \mathbb{Q}[X]$.

Sei n = Grad von K über $\mathbb{Q} = \dim_{\mathbb{Q}} K$.

Bekanntlich existieren genau n Körperisomorphismen $\sigma_i : K \hookrightarrow \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, n$), etwa $\sigma_1 = id$. Für jedes $y \in K$ sind $tr(y) := \sigma_1(y) + \dots + \sigma_n(y)$ und $n(y) := \sigma_1(y) \cdot \dots \cdot \sigma_n(y)$ in $\mathbb{Q}$ enthalten.

Sei $\mathcal{O}$ = Ring der ganzen Zahlen in K ($= \{y \in K \mid y$ Nullstelle eines Polynoms $X^r +$ (Terme vom Grad $\leq r$) $\in \mathbb{Z}[X]\}$). Bekanntlich ist $\mathcal{O}$ abgeschlossen unter Multiplikation und Addition, also tatsächlich ein Ring.

Ein gebrochenes Ideal in K ist ein endlich erzeugter $\mathcal{O}$-Untermodul von K. Ein gebrochenes Ideal heißt ganz, falls es in $\mathcal{O}$ enthalten ist. Die gebrochenen Ideale $\neq 0$ in K bilden eine Gruppe bzgl. der Multiplikation

$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} :=$ der von allen yy' ($y \in \mathfrak{a}, y' \in \mathfrak{b}$) erzeugte $\mathcal{O}$-Untermodul von K

(es ist $\mathfrak{a}^{-1} = \{y \in K \mid y\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}\}$).

Jedes gebrochenen Ideal $\neq 0$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang n. Mit letzteren folgt leicht, daß für ein gebr. Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ der $\mathcal{O}$-Modul

$\tilde{\mathfrak{a}} := \{\tilde{y} \in K \mid tr(y\tilde{y}) \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in \mathfrak{a}\}$

wieder endlich erzeugt ist, also wieder ein ~~endliches~~ gebrochenes Ideal ist.

Es gilt:

$\mathfrak{D}$ (= Differente von K) $:= \tilde{\mathcal{O}}^{-1}$ ist ein ganzes Ideal,

Für jedes gebr. Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ ist $\tilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{a}^{-1}$.