(4)

premier pas : identifier $\rho$ (ou $\Theta^k \otimes \rho$)

On sait

1) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho(T) =$ matrice diagonale avec racines d'unité sur le diagonale ! (qui dépend de $k$)

i.e. $\rho(T)^N = id$ (matrice unité) pour un $N \in \mathbb{Z}_{>0}$

2) $\ker(\rho)$ = groupe de congruence de $\Gamma$

<u>Théorème</u> (Fricke-Klein-Wohlfahrt)

$\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ une représ., $\ker \rho$ = groupe de congr.,
$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tel que $\rho(T)^N = id$.
Alors $\ker \rho \supseteq \Gamma(N)$
($\Gamma(N)$ = groupe de congruence principale du niveau $N$)
Donc $\rho$ factorise à une
$\bar{\rho} : \Gamma / \Gamma(N) \cong SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \to GL(n, \mathbb{C})$,
donc seulement un nombre fini de possibilité pour $\rho$.

Pour réduire encore plus les possibilités pour $\rho$ on utilise que $\eta^k \xi$ a des coéffic. de Fourier rationnels

<u>Théorème</u>:
$k, N \in \mathbb{Z}$, $N > 0$, $K = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$.
Alors l'espace
$M_k^N(\Gamma(N)) \cong$ formes mod. dans $M_k(\Gamma(N))$ avec coéff. de Fourier ~~rationnels~~ dans $K$
est invariant sous $(f, A) \mapsto f|_k A$. $(A \in \Gamma)$.

<u>Corollaire</u>
$\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ représ., $\ker \rho \supseteq \Gamma(N)$ pour un $N \in \mathbb{Z}_{>0}$,
$K = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$.
Si il existe $F \in M_k(\rho)$ (pour un $k \in \mathbb{Z}$) avec des coéff. de Fourier dans $K$, alors
$\rho(\Gamma) \subseteq GL(n, K)$.