③

La démonstration est basée sur trois lemme (ou théorème) que je vais discuter brièvement. D'abord quelques notations:

Soit $\xi =$ vecteur à colonne avec les ξ_h comme éléments (on fixe un ordre pour les h)

alors

$$\xi(A\tau) = \rho(A)\,\xi(\tau) \qquad (A \in \Gamma)$$

avec une représent.

$$\rho : \Gamma \longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \qquad (n = \# H_c).$$

Donc on peut considérer $\xi(\tau)$ comme une fonctions modulaires à valeurs vectorielles.

Il est parfois utile à multiplier ξ par des puissances de

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod^{\infty} (1-q^n).$$

Dans ce cas le résultat est une formes modulaires à valeurs vectorielles sur Γ (peut-être du poid demi-integral)

Plus précisemment, pour décrire cette situation, soit

$$\tilde{\Gamma} = \{(A, w(\tau)) \mid A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma,\ w \in Hol(\mathfrak{H}),\ w^2(\tau) = c\tau + d\}$$

group via loi de comp.

$$(A, w)(A', w') = (AA', w(A'\tau)\, w'(\tau))$$

On à pour chaque $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ une action de $\tilde{\Gamma}$ sur $Hol(\mathfrak{H})$:

$$(F, (A, w)) \longmapsto F|_k(A, w) = F(A\tau)\, w(\tau)^{-2k} \qquad (\text{"la barre"}).$$

Soit $\sigma : \tilde{\Gamma} \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$ une représ., alors on pose

$$M_k(\sigma) = \left\{ F : \mathfrak{H} \xrightarrow{hol.} \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} F|_k \alpha = \sigma(\alpha) F \quad \forall \alpha \in \tilde{\Gamma} \\ F = O(1) \text{ pour } \operatorname{Im}\tau \to \infty \end{array} \right\}$$

exemple de base :

$\eta \in M_{\frac{1}{2}}(\theta)$ pour une répres. $\theta : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \mu_{24}$

$\eta^k \xi \in M_{\frac{k}{2}}(\theta^k \otimes \rho)$ pour $k \geqq \tilde{c}$.