Ça ressemble à des fonctions (9)

$$\varphi_r = \frac{\eta(q^\ell)}{\eta(q)\,[r]_\ell} \qquad \left(\begin{array}{l}\ell = 2k+1 \text{ impair} \\ 1 \leq r \leq \frac{\ell-1}{2}\end{array}\right)$$

Aussi caractères de quelques algèbres W;
plus intéressant : ces sont les côtés gauches de identités généralisée de Rogers–Ramanujan (id. de Andrews–Gordon)

$$\varphi_r = \sum_{m_1,\dots,m_{k-1}\geq 0} \frac{q^{\vec{m}^t A[\vec{m}] + b_r\cdot\vec{m}}}{(q)_{m_1}(q)_{m_2}\cdots(q)_{m_{k-1}}}$$

$$(A = (\min(i,j))_{1\leq i,j\leq k-1}, \quad b_r = \begin{pmatrix}\min(i-r+1,0)\end{pmatrix}_i$$

$$(q)_m = (1-q)\cdots(1-q^m)$$

$\ell = 5$: R–R.
$r = 2$:

Chose intéressante : côté droit fonction modulaire pas du tout évident.

Question : Pour quel $A > 0$, symétrique, $\ell\times\ell$ (et $b\in\mathbb{C}^\ell$) est

$$\sum_{m_1\dots m_\ell} \frac{q^{A[\vec{m}] + b\vec{m}}}{(q)_{m_1}\cdots(q)_{m_\ell}} = \text{fonct. modul.}$$

Donc : Réponse connue seulement pour $k = 1$:
fonc modul. seulement pour $A = 1$ (R–R) et $A = \frac{1}{2}$ (id. d'Euler)

Physiciens : Ces A donnent une classification d'algèbres W
(≈ super matrices de Cartan associé à .. W)

Connue : ces A ⟶ identités pour le dilog

Peut-être : pour nos cas il existe aussi des identités à la R–R. ? Nous avons les côtés gauches, mais aucune indication pour les côtés droits.
Expérimentalement : impossible si on ne connaît pas ℓ !!!

Donc on ne passe.