En fait.

7

Théorème (~)

Pour tout σ et tout $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$\dim M_k(\rho) - \dim S_{2-k}(\overline{\rho}) = \text{formule simple et explicite.}$$

$$\left(= \frac{k-1}{12}\rho(1) + O(1) \quad (k \to \infty) \right)$$

Il reste à identifier ρ !

$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors prop. (4) $\Rightarrow$ $\rho(T) =$ matrice diagonale ~~$\rho(T)^N$~~

en fait $\rho(T)^N = 1$ pour N (se déduire de H_c)

De plus ~~Ker~~ ρ = groupe de congruence (hyp. supplém.).

Théorème (Fricke-Klein-Wohlfahrt)

Soit $\rho : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ représent., $\operatorname{Ker} \rho$ = groupe de congruence $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.q. $\rho(T)^N = \mathbb{1}$.

Alors $\operatorname{Ker}(\rho) \supseteq \Gamma(N)$.

Donc ρ factorise à $\Gamma/\Gamma(N) = SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \to GL(n, \mathbb{C})$

donc seulement un nombre fini de possibilité pour ρ.

Pour réduire encore ~~en plus~~ les choix possibles pour ρ on utilise que $\eta^4 \rho$ poss. coeff. de Fourier $\in \mathbb{Q}$.

Théorème $k, N \in \mathbb{Z}, N > 0$, $K = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$. Alors

$M_2^K(\Gamma(N)) = (~~formes~~ ~~modul.~~ M_2(\Gamma(N)) \cap K[\![q]\!])$

est invariant sous $(f, A) \mapsto f|_k A$

Pas évident, on utilise que " $X_{\Gamma(N)}$ déf. sur K "

Corollaire $\rho : \Gamma \xrightarrow{\text{repr.}} GL(n, \mathbb{C})$, $\operatorname{Ker} \rho \supseteq \Gamma(N)$, s'il existe $0 \neq F \in M_k(\rho)$ (un k) avec coeff de Fourier dans K, alors $\rho(\Gamma) \subseteq GL(n, \underline{K})$. ($F|A = \rho(A) F$, Th. $\Rightarrow F|A \in K[\![q]\!]^n \Rightarrow \rho(A) \in K[\![q]\!]^n$)