Comment prouver ?

ξ = vecteur à colonne formé par les ξ_h (dans un ordre fixé)

$$\xi(A\tau) = \rho(A)\,\xi(\tau) \qquad (\forall A \in \Gamma = SL(2,\mathbb{Z}))$$

avec $\rho : \Gamma \xrightarrow{\text{rep.}} GL(n,\mathbb{C})$ convenable.

~~Donc si $k \gg 0$:~~

$\cancel{\eta^k \xi \in M_{\frac{k}{2}}(\ldots)}$

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1-q^n) \qquad (\text{êta de Dedekind})$$

Si $k \in \mathbb{Z}$, $k \gg 0$, alors

$\eta^k \xi$ = formes modulaires sur Γ avec valeurs $\in \mathbb{C}^n$
de poids $\frac{k}{2}$ (peut-être demi-entier).

Pour traiter demi-entier :

$$\tilde{\Gamma} = \{ (A, w(\tau)) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma,\ w \in Hol(\mathfrak{H}),\ w(\tau)^2 = c\tau + d \}$$

groupe p.r. à : $(A, w)(A', w') := (AA', w(A'\tau)\cdot w'(\tau))$

action de $\tilde{\Gamma}$ sur les $F : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}^n$, ~~$(A,w) \in \tilde{\Gamma}$~~ pour tout $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$F|_k (A, w) = F(A\tau)\, w(\tau)^{-2k}.$$

Soit $\sigma : \tilde{\Gamma} \to GL(n,\mathbb{C})$ représentation,

$$M_k(\sigma) = \left\{ F : \mathfrak{H} \xrightarrow{\text{hol.}} \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} F|_k \alpha = \rho(\alpha) F \quad \forall \alpha \in \tilde{\Gamma} \\ F = \mathcal{O}(1) \quad \angle\tau \to 0 \end{array} \right\}$$

exemp. fondamental : $\eta \in M_{\frac{1}{2}}(\theta)$ avec ~~certain~~ $\theta : \tilde{\Gamma} \to \mu_{24}$

Si $k \geq \tilde{c}$: $\underline{\eta^k \xi \in M_{\frac{k}{2}}(\theta^k \otimes \rho)}$.

L'avantage : $M_{\frac{k}{2}}(\sigma)$ de dimension finie.