Sei $A > 0$ und für $0 \leq t \leq A$:

$$\psi_t(z) = \sum_{r \equiv t\,(2A)} q^{\frac{r^2}{4A}} = q^{\frac{t^2}{4A}} \prod_{n>0} (1-q^{2An})(1+q^{2An-A+t})(1+q^{2An-A-t});$$

ferner (*).
insbesondere

$$\psi_0 = \prod_{n>0} (1-q^{2An})(1+q^{(2n-1)A})^2,$$

$$\psi_A = 2\, q^{\frac{A}{4}} \prod_{n>0} (1-q^{2An})(1+q^{2An})^2.$$

Lemma 1

$$\psi_s\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{-iz}\,\frac{1}{\sqrt{2A}} \left\{ \psi_0 + 2\cos\frac{2\pi s}{2A}\,\psi_1 + \dots + 2\cos\frac{2\pi s(A-1)}{2A}\,\psi_{A-1} + (-1)^s \psi_A \right\}.$$

Der Beweis folgt weiter unten.

~~Lemma 2~~

Sei $p = 4AC - B^2$ eine Primzahl, $\theta_{[A,B,C]}(z) = \sum_{r,s \in \mathbb{Z}} q^{Ar^2+Brs+Cs^2}$ und $q = e^{2\pi i z}$.

Dann gilt:

Lemma 2

$$\theta_{[A,B,C]} = \sum_{s \bmod 2A} \psi_s(pz)\, \psi_{Bs}(z) \quad \cancel{\text{modulo}}$$

Beweis

$$\theta_{[A,B,C]} = \sum_{r,s} q^{Ar^2+Brs+Cs^2} = \sum_{r,s} q^{\frac{(2Ar+Bs)^2+ps^2}{4A}}$$

$$= \sum_{t \bmod 2A} \sum_{s \equiv t\,(2A)} q^{\frac{ps^2}{4A}} \sum_r q^{(2Ar+Bs)^2/4A}$$

$$= \sum_{t \bmod 2A} \Big(\sum_{s \equiv t\,(2A)} q^{\frac{ps^2}{4A}}\Big)\Big(\sum_{r \equiv Bt\,(2A)} q^{\frac{r^2}{4A}}\Big).$$

(*) Zu jeder Zahl s gibt es genau ein t mit $0 \leq t \leq A$, sodaß ~~$s \equiv \pm t$~~ $s \equiv t\ (2A)$ oder $s \equiv -t\ (2A)$; wir bezeichnen dieses t mit $t = \langle s \rangle$;
Sei $\psi_s := \psi_t$.