Es ist nun

$$X^{p+1} + Y^{p+1}$$

– aufgefasst als Polynom über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ – invariant unter $(\ )^\tau$:

$$[w(X+Y)]^{p+1} + [w(X-Y)]^{p+1}$$

$$\equiv w^{p+1} \{ [X^{p+1} + X^p Y + X Y^p + Y^{p+1}] + [X^{p+1} - X^p Y - X Y^p + Y^{p+1}] \}$$

$$\equiv w^2 \{ 2 X^{p+1} + 2 Y^{p+1} \} \equiv X^{p+1} + Y^{p+1} \text{ modulo } p.$$

Also gilt es ganze Zahlen a_z, sodass

$$X^{p+1} + Y^{p+1} \equiv \sum_{z=0}^{[\frac{\ell}{3}]} a_z f^{\frac{\ell}{4} - 3z} g^z \mod p.$$

Diese Kongruenz bleibt richtig, wenn wir X und Y durch ψ_0 und ψ_1 ersetzen, wodurch dann der angekündigte Satz folgt.

So folgt etwa:

$$\theta_{[1,1,2]} \equiv E_4 \mod 7 \qquad Q$$

$$\theta_{[1,1,6]} \equiv E_4^3 - 5\Delta \mod 23 \qquad Q^3 - 5\frac{(Q^3-R^2)}{1728}$$

$$\theta_{[1,1,8]} \equiv E_4^4 + 3 E_4 \Delta \mod 31$$

$P = G_2$

$Q = E_4$

$R = E_6$

$\Delta = \frac{Q^3 - R^2}{1728}$

$$E_4 = \sum{}' \sigma_3(n) q^n$$

$$\sigma_3(n) \underset{7}{\equiv} \underbrace{\sum_{d|n} \left(\frac{-7}{d}\right)} \qquad \sum_{d|n} \left(\frac{-23}{d}\right) \underset{23}{\equiv} \sigma_{11}$$

$$\theta_{[1,1,6]} + 2\theta_{[2,1,3]} \underset{23}{\equiv} E_{12} \qquad \tau(p)$$

$$\frac{1}{2}\left(\theta_{[1,1,6]} - \theta_{[2,1,3]}\right) \equiv \Delta \quad (23) \qquad \equiv \sigma_{11}(p)$$

$\left(\frac{-23}{p}\right) = -1 \quad p \neq 23$