Satz

Sei p eine Primzahl, $p = 8\ell - 1$ für ein $\ell > 0$;
sei $\Theta_{[1,1,2\ell]}(z) = \sum_{r,s\in\mathbb{Z}} q^{r^2+rs+2\ell s^2}$ $\quad (q = e^{2\pi i z})$.
Dann besteht eine Kongruenz der Gestalt

$$\Theta_{[1,1,2\ell]} \equiv \sum_{\lambda=0}^{[\frac{\ell}{3}]} \alpha_\lambda E_4^{\ell-3\lambda} \Delta^\lambda \quad \text{modulo } p$$

λ $\lambda^{=\lambda}$

für geeignete ganze Zahlen α_λ; dabei ist

$$E_4 = 1 + 240 \sum_{n>0} \sigma_3(n) q^n, \quad \Delta = q \prod_{n>0} (1-q^n)^{24}.$$

Der Beweis geht über die Folge der Lemmata.

Sei
$$\psi_0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} = \prod_{n>0}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2,$$
$$\psi_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{\frac{(2n+1)^2}{4}} = 2 \times q^{\frac{1}{4}} \prod_{n>0}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2.$$

Lemma 1

$$\Theta_{[1,1,2\ell]} \equiv \psi_0^{p+1} + \psi_1^{p+1} \quad \text{modulo } p.$$

Beweis

$$\Theta_{[1,1,2\ell]} = \sum_{r,s} q^{r^2+rs+2\ell s^2} = \sum_{r,s} q^{\frac{(2r+s)^2+(8\ell-1)s^2}{4}}$$
$$= \sum_{t \bmod 2} \sum_{r\equiv t(2)} q^{\frac{r^2}{4}} \sum_{s\equiv t(2)} q^{\frac{ps^2}{4}} = \psi_0(z)\psi_0(pz) + \psi_1(z)\psi_1(pz)$$
$$= \left\{\prod_{n>0}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2\right\}\left\{\prod_{n>0}(1-q^{p\times 2n})(1+q^{p(2n-1)})^2\right\}$$
$$+ 2^2 q^{4\ell}\left\{\prod_{n>0}(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2\right\}\left\{\prod_{n>0}(1-q^{p\times 2n})(1+q^{p\times 2n})^2\right\};$$

wegen $(1\pm q^{p\times r}) \equiv (1\pm q^r)^p$ modulo p und $2^2 \equiv 2^{p+1} \bmod p$
folgt hieraus die Behauptung. /

$$f(q)\in \mathbb{Z}[[q]] \Rightarrow f(q^p) \equiv f(q)^p \pmod p$$

$f(z)$ $\qquad f(pz)$