Daher ist $|\Gamma'/\Gamma|$ ein Teiler von $\det\Gamma$, ~~$= 1$ oder $= p$; der zweite Fall ist aber unmöglich~~ und da die kanonische Abbildung $\Gamma'/\Gamma \to \Lambda^*/\Lambda$ eine Injektion ist, und $(\det\Gamma, \det\Lambda) = 1$ gilt, folgt $|\Gamma'/\Gamma| = 1$.
Ist nun $g\lambda \equiv \lambda \mod \Lambda$ für ein $\lambda \in \Lambda^*$, so ist $\sum_{i=1}^{p} g^i\lambda \equiv p\lambda \mod \Lambda$; aber $\sum_{i=1}^{p} g^i\lambda \in \Gamma' = \Gamma$, daher $p\lambda \in \Lambda$; da $(p, \det\Lambda) = 1$ zieht $p\lambda \in \Lambda$ aber $\lambda \in \Lambda$ nach sich. $\boxed{}$

<u>Anwendung</u>

Sei $[a, b, c]$ eine positiv-definite quadratische Form der Diskriminante $-p$, $(a, p) = 1$.
Sei

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2a}}(x_1, \dots, x_{p+1}) \in \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathbb{Z}^{p+1} \;\middle|\; \frac{x_1}{b} \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_{p+1} \mod 2a \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{p+1},$$

wo $\mathbb{Q}^{p+1}$ mit dem „üblichen" Skalarprodukt versehen sei.
Es ist dann

$$\Lambda^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2a}}(x_1, \dots, x_{p+1}) \in \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathbb{Z}^{p+1} \;\middle|\; b x_1 + x_2 + \dots + x_{p+1} \equiv 0 \mod 2a \right\},$$

$\det\Lambda = (2a)^{p-1}$, Stufe von $\Lambda = 2a$.
Sei $g \in O(\mathbb{Q}^{p+1})$ folgendermaßen definiert:

$$g(x_1, \dots, x_{p+1}) = (x_1, x_{p+1}, x_2, x_3, \dots, x_p);$$

dann ist g ein Automorphismus von Λ mit

(i) Ordnung von $g = p$,

und

(ii) $$[SL_2\mathbb{Z} : \Gamma_0(2a)] = 2a \prod_{\substack{l \mid 2a \\ l \text{ Prim}}} \left(1 + \frac{1}{l}\right) \not\equiv 0 \mod p \text{ falls } p > 3;$$

wäre nämlich für eine Primzahl $l \mid 2a$: $l \equiv -1 \mod p$, so ist wegen $p > 3$ l ungerade, und so: