Beweis

Ist $G$ die von $g$ erzeugte zyklische Gruppe, so operiert $G$ auf $\Lambda^*/\Lambda$ und $\Lambda^*/\Lambda$ zerfällt unter dieser Operation in Bahnen; wegen i) und iii) enthält die Bahn eines jeden von $0$ verschiedenen Elements von $\Lambda^*/\Lambda$ genau $p$ Elemente, d.h. es existiert eine Zerlegung der Gestalt:

$$\text{①} \quad \Lambda^*/\Lambda = \{0\} + \sum_{\bar{z} \in \mathcal{L}} G\bar{z}, \quad |G\bar{z}| = p \text{ für } \bar{z} \neq 0.$$

Wir haben daher zunächst

$$\text{②} \quad \det \Lambda \equiv 1 \mod p,$$

und mit Satz $\Theta$ folgt, daß $D(A) \in GL_d\, R$.

Aus ①, Satz $\Theta$ und dem Lemma folgt weiter für $A, B \in SL_2\mathbb{Z}$:

$$D(AB)|_{0,0} \equiv \pm \sum_{\bar{z} \in \Lambda^*/\Lambda} D(A)|_{0,\bar{z}}\; D(B)|_{\bar{z},0}$$
$$\equiv \pm\, D(A)|_{0,0}\; D(B)|_{0,0} \mod p,$$

d.h.

$$\text{③} \quad A \mapsto D(A)|_{0,0} \text{ induziert einen Homomorphismus}$$
$$\chi : SL_2\mathbb{Z} \longrightarrow (R/pR)^*/\{\pm 1\} \quad )$$

wo $(R/pR)^*$ für die Gruppe der Einheiten von $R/pR$ steht.

Es ist aber $\chi\left(\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right) = 1$, und da $SL_2\mathbb{Z}/K(SL_2\mathbb{Z})$ — wo $K(SL_2\mathbb{Z})$ für die Kommutatorgruppe von $SL_2\mathbb{Z}$ steht — von $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right] K(SL_2\mathbb{Z})$ erzeugt wird, folgt $\chi(A) = 1$ für alle $A \in \mathbb{Z}$, d.h.

$$D(A)|_{0,0} \equiv \pm 1 \mod p \quad \text{für } A \in SL_2\mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist daher

$$1 \equiv D\left(\left[\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right]\right)\Big|_{0,0}^2 \equiv e^{-\pi i \frac{\operatorname{rang}\Lambda}{2}} \mod p$$