4.) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit einem positiv-definiten Skalarprodukt $(\lambda,\mu) \mapsto \lambda\cdot\mu \in \mathbb{Q}$.

Sei $\Lambda \subseteq V$ ein vollständiges, ganzes und gerades Gitter (d.h. $\operatorname{rang}(\Lambda) = \dim V$; $\lambda\cdot\mu \in \mathbb{Z}$, $\lambda^2 \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\lambda,\mu \in \Lambda$).

Λ^* bezeichne das zu Λ duale Gitter, $d = \det(\Lambda) = |\Lambda^*/\Lambda|$, s = Stufe von Λ (die kleinste positive natürliche Zahl, sodaß für alle $\lambda,\mu \in \Lambda^*$: $s\lambda\cdot\mu \in \mathbb{Z}$, $s\lambda^2 \in 2\mathbb{Z}$; für $g \in \Lambda^*$ bezeichne $\bar{g}$ die Nebenklasse ~~von~~ $g+\Lambda$.

Für $M \subseteq \Lambda^*$ sei $\Theta_M = \sum_{\lambda \in M} q^{\lambda^2/2}$ ($q = e^{2\pi i z}$, $\operatorname{Im} z > 0$);
für $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2\mathbb{Z}$ sei $\Theta_M|_A$ die Funktion

$$\Theta_M|_A(z) = \frac{\Theta_M(Az)}{\sqrt{cz+d}^{\,\operatorname{rang}(\Lambda)}},$$

wobei die Wurzel so gewählt sei, daß $-\pi/2 < \operatorname{Arg}(\sqrt{cz+d}) \leq +\pi/2$.

Es gilt der

<u>Satz 0</u>

Es gibt eine Abbildung $D : SL_2\mathbb{Z} \longrightarrow GL_d R$ — wobei $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{\det\Lambda}, e^{\pi i s/4}\right]$ ($d = \det\Lambda$, s = Stufe von Λ) —, sodaß D einen Homomorphismus

$$SL_2\mathbb{Z} \longrightarrow GL_d R/\{\pm 1\} \quad \text{— falls } r \equiv 1 \bmod 2$$

bzw. $SL_2\mathbb{Z} \longrightarrow GL_d R$ — falls $r \equiv 0 \bmod 2$

induziert,

und sodaß mit $D(A) = \left(D(A)|_{\bar\lambda,\bar\mu}\right)_{\bar\lambda,\bar\mu \in \Lambda^*/\Lambda}$ gilt:

$$\Theta_{\bar\lambda}|_A = \sum_{\bar\mu \in \Lambda^*/\Lambda} D(A)|_{\bar\lambda,\bar\mu}\, \Theta_{\bar\mu}.$$

Dabei ist