Gegenbeispiel:

Für $p = 47$ ist $h(-p) = 5$; ist daher $\zeta = e^{2\pi i/5}$, bezeichnet $C \neq 1$ eine Idealklasse von $\mathbb{Q}(\sqrt{-47})$, so sind die beiden normalisierten Hecke-Eigen- und Spitzenformen von Θ gegeben durch:

$$\Theta_1 = \Theta_{C^0} + (\zeta + \zeta^4)\,\Theta_C + (\zeta^2 + \zeta^3)\,\Theta_{C^2}$$

$$\Theta_2 = \Theta_{C^0} + (\zeta^2 + \zeta^3)\,\Theta_C + (\zeta^1 + \zeta^4)\,\Theta_{C^2}.$$

Nun ist $\zeta + \zeta^4 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $(\zeta^2 + \zeta^3) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; der von den Fourierkoeffizienten von Θ_1, Θ_2 erzeugte Körper ist $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Auf der anderen Seite ist $\dim S_{22} = 2$, und der von den beiden normalisierten Hecke-Eigenformen $f_1, f_2 \in S_{22}$ erzeugte Körper ist $\mathbb{Q}(\sqrt{144169})$.

Für K kann also $\mathbb{Q}(\sqrt{144169}, \sqrt{5})$ gewählt werden.

Wäre etwa

$$\Theta_1 \equiv f_1 \bmod p,$$

so sei $\sigma \in \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ der Automorphismus mit $\sqrt{5} \to -\sqrt{5}$, $\sqrt{144169} \to \sqrt{144169}$, sodaß

$$\Theta_2 = \Theta_1^\sigma \equiv f_1^\sigma = f_1 \bmod p$$

gilt (für $f = \sum a(n) q^n \in K[\![q]\!]$ sei $f^\sigma := \sum a(n)^\sigma q^n$), daher $\Theta_1 \equiv \Theta_2 \bmod p$, was unmöglich ist (cf. Proposition 1).

Es gilt aber

Satz

Sei $\mathfrak{P}$ ein Primideal in K mit $\mathfrak{P} | p$; dann gibt es zu jedem Θ_χ eine normalisierte Hecke-Eigenform $f \in S_r$, sodaß

$$\Theta_\chi \equiv f \bmod \mathfrak{P}.$$