3.) Kongruenzen zwischen Hecke-Eigenformen

Sei $r \equiv \frac{p+1}{2} \bmod (p-1)$, seien $f_1, \dots, f_n$ die normalisierten Hecke-Eigenformen von S_r,

$$f_i = \sum a_i(n)\, q^n .$$

Die $a_i(n)$ sind ganz algebraische Zahlen, und es ist möglich den Zahlkörper K aus 2.) so zu wählen, daß K die Fourierkoeffizienten der f_i und Θ_χ umfasst.

Sei $\mathcal{H}$ der Ring der Hecke-Operatoren auf S_r, d.h. $\mathcal{H} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}} S_r$ ist der von den Operatoren $T(\ell)$ (ℓ durchläuft die Menge der Primzahlen) erzeugte Ring, wo für $f = \sum a(n)\, q^n \in S_r$:

$$(*) \qquad f|T(\ell) = \sum \left\{ a(\ell n) + \ell^{r-1} a\left(\tfrac{n}{\ell}\right) \right\} q^n$$

($a(\frac{n}{\ell}) := 0$ für $\ell \nmid n$).

Es ist stets

$$(**) \qquad \prod_{i=1}^{n} \left(T(\ell) - a_i(\ell)\right) = 0 .$$

Wegen $(*)$ gibt es einen ~~Hom~~ Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_p \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{End}\left(S_r(\mathcal{O}_p) \bmod p\right) \quad \left(\text{bzw. } \mathrm{End}\left((S_r(\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}) \bmod \mathfrak{P}\right)\right)$$
$$\Lambda \longrightarrow \bar{\Lambda}$$

wo $\bar{\Lambda}$ sich erklären läßt durch $\bar{f}|\bar{\Lambda} = \overline{f|\Lambda}$ für $f \in S_r \mathcal{O}_p$ (bzw. $f \in S_r \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$).

Sei $\mathcal{H}_p$ (bzw. $\mathcal{H}_{\mathfrak{P}}$) das Bild dieses Homomorphismus; $\mathcal{H}_p$ (bzw. $\mathcal{H}_{\mathfrak{P}}$) ist eine $\mathcal{O}_p/p\mathcal{O}_p$- (bzw. $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$-) Algebra, und wir haben n Algebren-Homomorphismen $\varphi_1, \dots, \varphi_n : \mathcal{H}_p \longrightarrow \mathcal{O}_p/p\mathcal{O}_p$