Sei r eine natürliche Zahl mit

$$r \equiv \frac{p+1}{2} \mod p-1$$

(sodaß r insbesondere gerade ist),

$$E_r = 1 - \frac{2r}{B_r} \sum_{n \geq 1} \sigma_{r-1}(n) q^n$$

(B_r ist die r-te Bernoullische Zahl: $\frac{q}{e^q - 1} = \sum \frac{B_n}{n!} q^n$).

Nach der Kummerschen Kongruenz für die Bernoullischen Zahlen ist B_r p-ganz ($p \geq 5$!) und

$$B_r \equiv B_{\frac{p+1}{2}} \mod p ;$$

es gilt ferner

$$-B_{\frac{p+1}{2}} \equiv \frac{h(-p)}{2} \mod p , \quad \frac{h(-p)}{2} \not\equiv 0 \mod p ,$$

sodaß also $E_r \in M_r(\mathbb{Z}_p)$ und

$$\begin{aligned} E_r &\equiv 1 + \frac{2}{h(-p)} \sum \Big(\sum_{d|n} d^{\frac{p-1}{2}} \Big) q^n \\ &\equiv \frac{2}{h(-p)} \Big\{ \frac{h(-p)}{2} + \sum \Big(\sum_{d|n} \Big(\frac{d}{p}\Big) \Big) q^n \Big\} \\ &\equiv \frac{2}{h(-p)} \Theta_{\chi_0} \mod p , \end{aligned}$$

wenn χ_0 den Hauptcharakter von I bezeichnet.

Es ist $M_r = \mathbb{C} E_r \oplus S_r$, und es gibt eine Basis $g_1, \ldots, g_n$ von S_r, sodaß $g_i \in S_r(\mathbb{Z})$ ~~für jedes i~~ und für $g_i = \sum a_i(n) q^n$ gilt:

$$a_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leq n < i \\ 1 & \text{für } n = i \end{cases}$$

(cf. Lang: Introduction to Mod. Forms, p. 158); es ist daher unmittelbar klar:

<u>Proposition 2</u>

$M_r(\mathcal{O}_p) \mod p$ ist ein freier $\mathcal{O}_p / p\mathcal{O}_p$ - Modul; als Basis kann $\overline{E}_r, \overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n$ gewählt werden.

Diese ~~Beh.~~ Aussage gilt sinngemäß für $M_r(\mathcal{O}_\mathfrak{P}) \mod \mathfrak{P}$ für jedes $\mathfrak{P} | p$.