Beweis

Ist $\bar{f} \in \Theta(\mathcal{O}_p) \bmod p$, $f = \sum a(n) q^n \in \Theta$, so gibt es zunächst Zahlen $\kappa_C \in \mathbb{C}$, sodaß

$$(*) \qquad f = \sum_{C \in H(I)} \kappa_C \, \theta_C .$$

Ist nun $C_0 \in H(I)$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{l}$ in C_0, und aus $(*)$ und der Definition der θ_C folgt ~~unmittelbar~~

$$(**) \qquad a(N(\mathfrak{l})) = \kappa_{C_0} \times \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Da $f \in \Theta(\mathcal{O}_p)$ folgt somit $\kappa_{C_0} \in \mathcal{O}_p$, und wir haben

$$\bar{f} = \sum_{C \in H(I)} \overline{\kappa_C} \; \overline{\theta_C} .$$

Ist $\bar{f} = 0$, also $\overline{a(n)} = 0$ für jedes n, so folgt aus $(**)$: $\overline{\kappa_{C_0}} = 0$.
Damit ist Teil a) bewiesen; insbesondere ist der Rang von $\Theta(\mathcal{O}_p) \bmod p$ gleich $\# H(I) = \frac{h(-p)+1}{2}$.

Da $\chi(C)$ für $\chi \in \hat{I}$, $C \in I$ stets eine Einheitswurzel ist, haben wir unter der in Teil b) an k gestellten Bedingung, daß $\chi(C) \in \mathcal{O}_p$; also ist $\theta_\chi \in \Theta(\mathcal{O}_p)$ für jedes χ.

Für jede Idealklasse C ist nun

$$\sum_{\chi \in \hat{I}} \chi(C)^{-1} \theta_\chi = \sum_{\chi \in I} \chi(C)^{-1} \sum_{D \in I} \chi(D)\, \theta_D$$

$$= \sum_{D \in I} \theta_D \sum_{\chi \in \hat{I}} \chi(C^{-1} D) = h(-p)\, \theta_D .$$

Nun ist $h(-p)^{-1} \in \mathcal{O}_p$, und wir haben daher

$$\overline{\theta_D} = \frac{1}{h(-p)} \sum_{\chi \in \hat{I}} \overline{\chi(C)^{-1}} \; \overline{\theta_\chi} .$$

Aus Teil a), aus $\theta_\chi = \theta_{\chi^{-1}}$ und aus $\# H(\hat{I}) = \frac{h(-p)+1}{2}$ folgt nun leicht die Aussage von Teil b). □